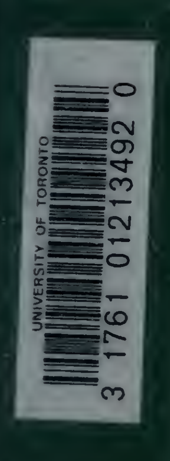


THÉORIE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU

PREMIER ORDRE.

(Extrait du tome XXV des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1875.)

Bruxelles, impr. de F. Hayez.

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU

PREMIER ORDRE;

PAR

M. PAUL MANSION,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

Ingressum instruas, progressum dirigas, egressum compleas ! St-THOMAS.

PARIS.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1875



A LA MÉMOIRE

DE

MATHIAS SCHAAR,

PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE GAND,

1864-1867.

AVERTISSEMENT.

I. OBJET DE CE MÉMOIRE.

Le présent mémoire est un essai de réponse à la question mise au concours par l'Académie en 1870 et en 1872, et relative à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

MM. Imschenetsky et Graindorge ont publié, l'un et l'autre, sur ce sujet, d'excellentes monographies, qui nous ont permis de nous borner, dans ce mémoire, à la théorie des équations du premier ordre. Leurs écrits, en effet, contiennent un bon résumé des travaux des géomètres sur les équations du second ordre; à part les études récentes de MM. Darboux et Lie, qui n'ont d'ailleurs été publiées que par fragments.

Les mémoires de MM. Imschenetsky et Graindorge sont incomplets sur la théorie des équations du premier ordre (*). Nous avons donc cru répondre au vœu de l'Académie, en essayant de faire un exposé des principales recherches des mathématiciens sur ce sujet, depuis Lagrange jusqu'à MM. Lie et Mayer.

Nous avons fait précéder notre travail d'une explication détaillée du plan que nous avons suivi.

[Conformément à l'avis des commissaires, chargés de juger notre mémoire, nous y avons fait un grand nombre de corrections et d'additions, qui sont placées entre crochets, ou signalées dans des notes spéciales.]

II. LISTE DES OUVRAGES ET MÉMOIRES CITÉS LE PLUS FRÉQUEMMENT (**).

A. *Traités de calcul intégral et monographies sur les équations aux dérivées partielles.*

I. Lacroix. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde édition. Tome II, 1814, pp. 527-604, 672-690; t. III, 1819, pp. 702-708. Paris, veuve Courcier.

II. Boole. A Treatise on differential Equations. Second edition. Cambridge and London, Macmillan and C°, 1865. Un volume de 496 pages, avec un Supplément de 235 pages.

(*) Le mémoire de M. Graindorge contient, outre la théorie des équations du second ordre, les matières exposées dans nos §§ 1 (en partie), 3, 6, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Celui de M. Imschenetsky contient, de plus, nos §§ 9 et 29, et un chapitre sur les équations canoniques de la dynamique. M. Graindorge a aussi publié à part un résumé des travaux des géomètres sur l'intégration des équations de la mécanique.

(**) Nous n'indiquons ici que les écrits cités assez souvent.

III. Serret. Cours de calcul différentiel et intégral. Tome II : Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars, 1868.

IV. Imschenetsky : 1° Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du russe par Houel. Paris, Gauthier-Villars; Greifswald, Koch. 1869. Ce travail a paru d'abord dans les *Archives de Grunert*, t. L, pp. 278-474.

2° Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, traduit du russe par Houel. Paris, Gauthier-Villars; Greifswald, Koch. Ce travail a paru d'abord dans les *Archives de Grunert*, 1872, t. LIV, pp. 209-360.

V. Graindorge. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Liége, Decq; Paris, Gauthier-Villars, 1872 (Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége*, 2me série, t. V).

B. *Mémoires de Lagrange et de Jacobi.*

I. Lagrange. 1. Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre (*Mémoires de Berlin*, 1772, p. 353; *Œuvres*, t. III, pp. 549-577. Paris, 1869).

2. Sur les intégrales particulières des équations différentielles (*Mémoires de Berlin*, 1774, p. 259; *OEuvres*, t. IV, pp. 5-108. Paris, 1869). Nous ne citons qu'une partie de l'article V : Des intégrales particulières des équations aux différences partielles, avec des remarques nouvelles sur la nature et sur l'intégration de ces sortes d'équations, pp. 62-89.

3. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des solutions particulières (*Mémoires de Berlin*, 1779, pp. 121-160; *OEuvres*, t. IV, pp. 585-634). Nous ne citons que l'article V : Sur

l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Mémoires de Berlin,* 1773, pp. 152-160; *OEuvres,* t. IV, pp. 624-634).

4. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires (*Mémoires de Berlin,* 1785, pp. 174-190).

5. Leçons sur le calcul des fonctions. Nouvelle édition. Paris, Courcier, 1806. Leçon 20, pp. 353-400.

6. Théorie des fonctions analytiques. Nouvelle édition. Paris, Courcier, 1813. Chap. XVI, pp. 152-164.

II. Jacobi. 1. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Journal de Crelle,* t. II, pp. 317-329).

2. Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren (*Ibid.*, pp. 347-357).

3. Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einziges Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (*Ibid.*, t. XVII, pp. 97-162).

Ce mémoire a été traduit en français : « Sur la réduction de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires » (*Journal de Liouville,* t. III, pp. 60-96; 161-201).

Nous citons la traduction française, en indiquant en même temps les paragraphes.

4. Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematatis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (*Journal de Crelle,* t. XXIII, pp. 1-104).

5. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi (*Ibid.*, t. LX, pp. 1-181; reproduit dans le t. III des *OEuvres* de Jacobi, pp. 129-309). Nous citons les paragraphes.

6. Vorlesungen über Dynamik von C.-G.-J. Jacobi nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen derselben, herausgegeben von A. Clebsch. Berlin, Reimer, 1866.

III. NOTATIONS ET CONVENTIONS SPÉCIALES.

I. Lorsqu'une variable z est fonction explicite ou implicite des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ nous désignons ses dérivées par rapport à x_1, x_2, etc., par les notations

$$\frac{dz}{dx_1},\ \frac{dz}{dx_2}, \ldots \qquad (1)$$

contrairement à l'usage de Jacobi, qui emploie, dans ce cas, les notations

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots$$

et réserve les d pour les dérivées des fonctions d'une seule variable.

Nous employons les notations

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_1},\ \frac{\delta \varphi}{\delta x_2}, \ldots \qquad (2)$$

pour désigner les dérivées d'une fonction *explicite* $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ de $x_1, x_2, \ldots$ *par rapport à la lettre* x_1, *à la lettre* x_2, etc., sans nous inquiéter si $x_1, x_2, \ldots$ sont indépendantes l'une de l'autre ou

non. Les deux notations peuvent être équivalentes dans certains cas; la notation (1) sert à désigner une expression qui ne dépend pas de la *forme* des relations qui existent entre $z, x_1, x_2, \ldots$; c'est l'inverse pour la notation (2).

II. La notation

$$\mathrm{D}\,\frac{f_1, \ldots, f_n}{x_1, \ldots, x_n}$$

représente le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, \ldots, \frac{df_n}{dx_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{df_1}{dx_n}, \ldots, \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

Il sera facile de discerner les deux cas, dans les applications que nous ferons de cette notation.

III. Pour la commodité du langage, nous avons fait de *dériver* un verbe actif, ce qui est conforme à l'étymologie, sinon à l'usage.

PLAN DU MÉMOIRE ET NOTICE HISTORIQUE.

Ce mémoire contient le résumé des recherches de Lagrange, Pfaff, Jacobi, Bour, Weiler, Clebsch, Korkine, Boole, Mayer, Cauchy, Serret et Lie, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous avons groupé les travaux de ces géomètres dans les subdivisions suivantes :

INTRODUCTION. Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre (§§ 1-4).

LIVRE I. Méthode de Lagrange et de Pfaff (§§ 5-15).

LIVRE II. Méthode de Jacobi (§§ 16-27).

LIVRE III. Méthode de Cauchy et de Lie (§§ 28-32).

APPENDICE. Méthode de Lie comme synthèse des idées antérieures (§ 33).

Cet arrangement est rigoureusement didactique, c'est-à-dire, que du commencement à la fin nous pénétrons de plus en plus profondément dans notre sujet. Il est en même temps historique dans ses grandes lignes, à une exception près : la méthode de Cauchy est antérieure de beaucoup à tous les travaux résumés dans notre livre deuxième. Nous avons été amenés à placer la méthode de Cauchy à la fin de notre mémoire, avec celle de Lie, parce que cette dernière est la suite naturelle de la première, et que, réunies, elles constituent une étude plus approfondie de la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles que les méthodes de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi et de Bour.

Dans notre Introduction, nous donnons d'abord, d'après Lagrange (1772 et 1774) et Lie (1872), la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous indiquons ensuite, d'après Jacobi, deux moyens généraux et très-simples de faire disparaître la variable indépendante des équations en question. Nous montrons, contrairement à l'avis de Bertrand et d'autres géomètres, que le second procédé de transformation de Jacobi n'est pas illusoire (§ 1). Les deux paragraphes suivants contiennent la théorie des équations aux dérivées partielles, à 3 ou à $(n + 1)$ variables, telle que l'a découverte Lagrange en 1774, au moyen de sa féconde méthode de la variation des constantes arbitraires. Nous avons ajouté toutefois à l'exposition de Lagrange diverses remarques empruntées à Jacobi et une méthode très-simple de génération des équations simultanées. Le dernier paragraphe est consacré aux vues de Lie sur le sujet traité dans les numéros précédents et à l'explication du paradoxe relatif aux constantes supplémentaires.

Le livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff. Nous avons exposé, avec prédilection, ces recherches déjà anciennes, d'abord parce qu'elles contiennent le germe de maintes découvertes ultérieures, ensuite parce qu'elles sont susceptibles d'une foule d'applications que l'on traite plus simplement, par ces méthodes, que par les méthodes plus savantes de Jacobi ou de Cauchy.

Le premier chapitre traite des équations linéaires, dont Lagrange a trouvé la théorie en 1779 et en 1785. Notre exposition ne diffère de celle de nos devanciers qu'en ce que nous employons davantage la théorie des déterminants fonctionnels. Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'extension de la théorie de Lagrange faite par Jacobi, en 1827. Il est assez étonnant que ces recherches du géomètre de Berlin soient passées sous silence dans tous les traités, et même dans les mémoires récents de Graindorge et Imschenetsky, car seules, elles font comprendre l'étroite connexion qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les systèmes d'équations différentielles du premier

ordre (voir le n° 32). En passant, nous avons fait connaître sous quel point de vue Lie considère les équations linéaires (n° 25).

Le second chapitre contient l'analyse des travaux de Lagrange sur les équations non linéaires. C'est en 1772 que le géomètre de Turin trouva le moyen de ramener l'intégration des équations non linéaires à trois variables à celle des équations linéaires à quatre variables. Il revint sur le même sujet en 1774, pour faire connaître les diverses intégrales des équations aux dérivées partielles, et en 1806, pour expliquer un singulier paradoxe que présente la théorie de l'intégrale générale. Nous faisons connaître la méthode de Lagrange sous ses diverses formes. En premier lieu, le grand géomètre observe qu'intégrer l'équation

$$q = \varkappa(x, y, z, p),$$

c'est trouver une valeur de p, telle que

$$dz = p dx + \varkappa dy$$

soit intégrable. Ensuite, il indique le moyen général pour trouver une valeur de p avec une constante arbitraire, ce qui est le germe de la *méthode de Jacobi*. Enfin, il montre comment on peut déduire la valeur la plus générale de z, de la valeur la plus générale de p, ce qui est le germe de la *méthode de Pfaff*.

Jacobi, en effet, en appliquant la méthode de Lagrange, sous sa dernière forme, aux équations à n variables indépendantes, a été amené, en 1827, à refaire en sens inverse tous les calculs de Pfaff. Nous exposons ce curieux travail de Jacobi dans notre chapitre III. Le géomètre de Berlin ramène l'intégration d'une équation non linéaire à celle d'un système d'équations simultanées dont la solution est plus générale que celle de l'équation donnée. Pour particulariser cette solution et en déduire l'intégrale cherchée, il est forcé de faire un changement de variables : $(2n - 1)$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont remplacées par les constantes de l'intégration des équations simultanées auxiliaires, et la question se ramène dès lors à l'intégration d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables.

Pfaff, dès 1814, avait suivi précisément une route inverse, comme nous le montrons dans le chapitre suivant. Pour intégrer l'équation

$$p_n = \varkappa(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

il considère l'équation différentielle totale

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varkappa dx_n$$

à $2n$ variables, $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, et la transforme en une autre de même forme à $(2n-1)$ variables. C'est précisément celle que Jacobi a trouvée en généralisant les dernières recherches de Lagrange, et Pfaff y arrive en intégrant le même système d'équations que Jacobi. Les deux méthodes sont donc identiques, sauf que l'une est, plus clairement que l'autre, la généralisation de la méthode de Lagrange, et que Pfaff traite, en outre, le problème général de l'intégration des équations différentielles totales, qui porte son nom. Dans notre exposition des travaux de Pfaff, nous nous aidons de divers écrits de Gauss, de Jacobi et de Cayley. Le dernier paragraphe du chapitre IV contient, outre le problème inverse de Pfaff, la simplification introduite dans toute cette théorie, par l'emploi des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires. Le problème général de Pfaff conduit à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents. Jacobi, en 1836, profitant d'une idée de Hamilton, montra que l'on peut former immédiatement ces n systèmes, si l'on prend, comme nous venons de le dire, les valeurs initiales des variables pour constantes arbitraires; de plus, s'il s'agit de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, il n'y a plus qu'un système à intégrer. Cauchy, longtemps auparavant, en 1818, était arrivé à ce dernier résultat, en employant aussi les valeurs initiales des variables comme constantes. C'est à lui, d'ailleurs, qu'est due l'introduction de cette idée dans la science, mais Jacobi semble avoir ignoré les travaux de Cauchy.

Tel est le cycle des recherches exposées dans notre livre premier. Nous avons joint à chaque théorie les applications que l'on

rencontre ordinairement dans les traités, outre celles qui se trouvent dans les mémoires de Lagrange. De plus, nous avons donné dans un paragraphe spécial l'intégration d'une équation très-remarquable, due à Schläfli, et publiée par lui en 1868.

Le livre second est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, enfin aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer qui s'y rattachent de très-près.

La *Nova methodus* de Jacobi a été trouvée par lui en 1838 et publiée par Clebsch en 1862. Nous la faisons connaître dans nos deux premiers chapitres. Notre exposition ne diffère de celle de Graindorge et Imschenetsky qu'en ce que nous avons réuni dans un chapitre spécial, le premier, tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité. En nous éloignant un peu de nos prédécesseurs et de Jacobi sur ce point, on trouvera peut-être que nous avons abusé des notations symboliques. Toutefois, le lecteur qui se sera familiarisé avec ces notations reconnaîtra que, seules, elles peuvent conduire naturellement à la démonstration des principes de la méthode de Jacobi. Dans le chapitre III, nous donnons l'extension de cette méthode aux équations simultanées, due à Bour, en corrigeant la petite erreur qui s'est glissée dans l'exposition de ce dernier et dans celle des auteurs qui l'ont suivi. Cette erreur a été signalée par Mayer, en 1871. Au point de vue historique, il importe de remarquer que les travaux de Bour ne procèdent pas de ceux de Jacobi, qui n'ont été publiés qu'en 1862. Liouville, Bour et Donkin avaient trouvé, vers 1853 et 1854, les théorèmes fondamentaux de la *Nova methodus*, sans avoir connaissance de celle-ci. Dans le chapitre IV, nous reproduisons des calculs d'une admirable élégance, dus à Clebsch, et publiés en 1866, où l'éminent algébriste fait connaître une notable simplification de la méthode de Jacobi, trouvée par Weiler en 1863.

Les chapitres V et VI sont consacrés à des méthodes où l'on procède par changement de variables. Dans la méthode de Korkine (1868), qui s'applique aux équations simultanées non linéaires, on dispose de la fonction arbitraire, qui entre dans l'in-

tégrale générale de l'une des équations données, de manière à satisfaire aux autres équations; on transforme ainsi le système en un autre qui contient une équation et une variable de moins. Les calculs auxquels nous avons été conduit pour démontrer les principes de cette méthode, auraient été extrêmement longs, si nous n'avions largement employé la théorie des déterminants. La méthode de Boole (1863), qui s'applique seulement aux équations linéaires, procède à peu près comme celle de Korkine. Elle est exposée dans le dernier paragraphe du chapitre V. La méthode de Mayer (1872), qui vient ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires, dont elle ramène l'intégration à celle de certains systèmes d'équations différentielles totales. Chaque fois que l'on parvient à intégrer une équation de l'un de ces systèmes, on le transforme en un autre système contenant une équation et une variable de moins. Les nouvelles variables sont les valeurs initiales des variables primitives. En outre, au moyen d'une transformation de variables d'un genre tout différent, on peut faire en sorte de n'avoir à considérer qu'un seul système. Quand il s'agit des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi, un théorème de Mayer, analogue à celui de Poisson et Jacobi, dont il est un corollaire, introduit de nouvelles simplifications.

Les méthodes de Jacobi, de Weiler et de Mayer, conduisent à chercher *une* intégrale de systèmes de $2(n-1)$, $2(n-2)$, ..., 2 équations différentielles ordinaires, ces systèmes étant respectivement pour les trois méthodes, au nombre de :

$$\begin{array}{lll} 1, 2, 3, \ldots (n-2), & (n-1), \\ 1, 2, 2, \ldots \quad 2, & 2, \\ 1, 1, 1, \ldots \quad 1, & 1. \end{array}$$

Les équations sont supposées ne pas contenir explicitement la variable dépendante. La méthode de Lie, dont nous parlerons plus bas, exige précisément le même nombre d'intégrations que celle de Mayer.

Le livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. L'illustre géomètre l'a trouvée dès 1818, en partant de

deux idées principales; l'une est le changement de variables, qu'il semble emprunter à Ampère, plutôt qu'à Lagrange ou à Pfaff, car il paraît avoir ignoré les recherches de celui-ci; l'autre est l'introduction immédiate dans le calcul des valeurs initiales des variables, comme on le fait dans la théorie des intégrales définies. Si les recherches de Cauchy n'étaient antérieures à celles de Jacobi sur la méthode de Pfaff, on les prendrait pour une exposition simplifiée de tous les travaux analysés dans notre livre premier, y compris la théorie des équations linéaires de Lagrange. Quand il s'agit de trouver les intégrales de ces équations, supposées à trois variables, Lagrange et Monge cherchent d'abord les courbes qui peuvent engendrer les surfaces représentées par les intégrales. Une idée analogue donne à Cauchy les courbes ou variétés à une dimension, appelées caractéristiques par Lie, qui engendrent, pour ainsi dire, l'intégrale des équations non linéaires. Pfaff et Jacobi étaient forcés, dans la suite de leurs calculs, d'égaler à des constantes n de leurs $(2n-1)$ variables auxiliaires. Cauchy, dès le début, ne prend que $(n-1)$ variables auxiliaires, et il suppose immédiatement que ce sont les valeurs initiales des anciennes variables, ce qui le dispense du circuit par lequel Jacobi est arrivé, plus tard, au même résultat. Cauchy a donné une forme plus générale à sa méthode, en 1841; les valeurs initiales des variables peuvent être à volonté de nouvelles variables ou des constantes d'intégration. C'est ce travail de 1841, auquel on n'a pas accordé suffisamment d'attention, qui est la base de notre exposition. Nous avons pu, grâce à lui, donner, avec une entière rigueur, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, dans les cas les plus singuliers, par exemple, dans le cas des équations semi-linéaires de Lie (1872), rencontré incidemment par Serret en 1861; l'intégrale de ces équations est donnée par m relations entre $(n+1)$ variables et n constantes arbitraires. Mayer a montré, en 1871, que la méthode de Pfaff, modifiée par Jacobi, ne donne jamais l'intégrale complète des équations homogènes par rapport aux quantités p; il en est de même de la méthode primitive de Cauchy. Mais quand on laisse à cette méthode toute son élasticité, si j'ose ainsi dire, elle conduit,

sans calcul, aux modifications de la méthode de Pfaff et Jacobi, proposées par Mayer.

La méthode générale de Cauchy se prête très-bien aussi à une exposition rigoureuse des recherches de Serret (1861), relatives au cas où la méthode de Cauchy *semble* en défaut. Nous donnons ces recherches dans le chapitre II.

Le chapitre suivant contient, d'après Mayer, un exposé de la méthode de Lie (1872) considérée comme une extension de la méthode de Cauchy. Dans cette méthode, on ramène l'intégration de $(m+1)$ équations à $(n+m)$ variables indépendantes à celles d'une équation unique contenant n variables indépendantes, soit en cherchant une intégrale de m équations, soit après une simple transformation de variables. Dans ce dernier cas, on voit clairement que la méthode de Lie est la suite naturelle de celle de Cauchy. Combinée avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $(n+1)$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables.

Enfin, dans un court appendice, nous donnons, au moyen des idées de Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales, qui permet au lecteur d'entrevoir leur fusion prochaine, entre les mains du géomètre norwégien.

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE.

INTRODUCTION.

GÉNÉRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

§ 1er. ***Définition des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Moyen d'en faire disparaître la variable dépendante. Interprétation géométrique de Lie.***

1. *Définition de Lagrange.* Une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est une relation entre une variable dépendante z, n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, et les dérivées premières

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1},\ p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \dots, p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

de z par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$. Elle est dite *linéaire,* si $p_1, p_2, \dots, p_n$ n'y entrent qu'au premier degré.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver toutes les relations entre

$z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que les valeurs de $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ que l'on en déduit, rendent cette équation (1) identique.

Plusieurs équations de même forme que l'équation (1) forment un système simultané d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, soit qu'il y entre une seule fonction inconnue z et ses dérivées, ou qu'il y en ait plusieurs. Les géomètres s'étant presque exclusivement occupés du premier de ces deux cas, nous nous bornerons ici à l'étude des équations simultanées qui ne contiennent qu'une variable dépendante.

Intégrer un système d'équations simultanées analogues à l'équation (1), c'est encore trouver toutes les relations entre $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que les valeurs de $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ que l'on en déduit, rendent ces équations identiques.

2. *Première méthode de transformation.* Qu'il s'agisse d'une équation unique, ou d'un système, il est souvent utile de transformer les relations données en d'autres qui contiennent une variable indépendante de plus, mais où la nouvelle variable dépendante n'entre que par ses dérivées partielles. Jacobi a donné, pour atteindre ce but, deux méthodes de transformation que nous allons faire connaître, en nous bornant au cas d'une équation unique (*).

Soit une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) La première méthode se trouve dans le mémoire de Jacobi, intitulé : *Dilucidationes, etc.* (Journal de Crelle, t. XXIII, pp. 18-20); l'autre, dans sa *Nova methodus*, § 1, et dans les *Vorlesungen*, leçon 31, p. 237. Cette seconde méthode est beaucoup moins pratique que la première, mais elle n'est pas illusoire, comme l'ont prétendu Boole, *On the differential equations of dynamics* (Philosophical Transactions, 1863, pp. 485-501), p. 489, Bertrand, dans ses leçons au Collége de France, en 1852, 1855, 1868 (Graindorge, *Mémoire*, etc., p. 16, note), et, d'après lui, Imschenetsky, p. 43, Graindorge, p. 16, et Mayer (Mathematische Annalen, t. III, p. 437). Ces géomètres ont attribué à Jacobi une erreur qu'il n'a pas faite, celle de vouloir éliminer deux quantités y et t entre deux équations. *Jacobi war doch nicht so kurzsichtig*, disait Clebsch à propos de cette prétendue erreur du grand géomètre.

une intégrale de cette équation. On aura :

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, p_2 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots, p_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il viendra :

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

L'équation obtenue au moyen de celle-ci, en changeant partout ∂ en d,

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dz}}, \ldots, -\frac{\frac{dF}{dx_n}}{\frac{dF}{dz}}\right) = 0, \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

est la transformée que nous cherchons. C'est une équation aux dérivées partielles entre une variable dépendante F et les variables indépendantes z, $x_1, \ldots, x_n$, dont l'intégration donne immédiatement celle de l'équation (1), comme nous allons le montrer.

Soit $$\varphi(F, z, x_1, \ldots, x_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

une solution quelconque de l'équation (4). On aura :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\frac{\partial\varphi}{\partial F}}, \frac{dF}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial F}}, \ldots, \frac{dF}{dx_n} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{\frac{\partial\varphi}{\partial F}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

et, en substituant dans (4),

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \ldots -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right) = 0. \; . \; . \; (7)$$

Cette équation (7) ne contient pas de dérivée par rapport à F. En la comparant à l'équation (1), on voit immédiatement que l'équation (5) est une solution de (1) pourvu que l'on y regarde F comme une constante (*).

L'équation transformée (4) est *homogène* par rapport aux dérivées de F. Comme on le verra plus loin, les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles ne s'appliquent pas toujours directement à cette sorte d'équations. C'est là, sans doute, la raison qui a conduit Jacobi à employer une autre méthode de transformation.

3. *Seconde méthode de transformation.* Posons

$$y = zt, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

et *supposons* z *indépendant de* t, de sorte que

$$\frac{dz}{dt} = 0. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

On tire de (8) :

$$\frac{dy}{dt} = z, \frac{dy}{dx_1}\frac{1}{t} = p_1, \dots, \frac{dy}{dx_n}\frac{1}{t} = p_n \quad \dots\dots \quad (10)$$

Au moyen de ces valeurs (10), l'équation (1) devient

$$f\left(\frac{dy}{dt}, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dy}{dx_1}\frac{1}{t}, \frac{dy}{dx_2}\frac{1}{t}, \dots, \frac{dy}{dx_n}\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \dots \quad (11)$$

qui ne contient plus explicitement y, mais où entre une variable t de plus.

Soit
$$F(y, t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad \dots\dots\dots \quad (12)$$

une intégrale quelconque de cette transformée (11). En général, comme l'a remarqué Bertrand, il ne suffira pas de remplacer dans cette équation (12), y par zt pour que l'on ait une solution

$$F(zt, t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

(*) Comme on le voit, il est inutile de supposer l'équation (5) résolue par rapport à F, comme l'ont fait Imschenetsky, p. 44, et Graindorge, p. 17, pour démontrer le théorème dont il s'agit dans ce numéro.

de l'équation (1) d'où t disparaisse de lui-même. Mais on ne peut pas conclure de là que la seconde méthode de transformation de Jacobi soit, en général, illusoire.

L'équation (13) est une intégrale, non de l'équation (1), mais de l'équation

$$f\left(z+t\frac{dz}{dt}, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n\right)=0, \ldots\ldots \quad (14)$$

où z est regardé comme une fonction de t, $x_1, \ldots x_n$. Quand on pose dans celle-ci $y=zt$, z *dépendant de* t, on est conduit à la transformée (11), et réciproquement de l'équation (11), on repassera à l'équation (14), en supposant uniquement $y=zt$. Ainsi, l'équation (13) est une solution de l'équation (14), parce que (12) est une solution de (11).

Mais pour repasser de l'équation (11) à l'équation (1), il ne suffit pas de supposer $y=zt$, il faut aussi tenir compte de l'équation (9), qui exprime que z est indépendant de t. Par conséquent, on trouvera une intégrale de (1), au moyen de (13), en éliminant t entre cette relation et celle-ci,

$$\frac{\dfrac{\delta F}{\delta y}z+\dfrac{\delta F}{\delta t}}{\dfrac{\delta F}{\delta y}t}=0, \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

qui est équivalente à (9) et où y est supposé remplacé par zt. Autrement dit encore, on trouvera une intégrale de (1), en éliminant y et t entre les équations (8), (12), (13).

Remarque. Si l'équation donnée est homogène par rapport aux quantités p, on peut la mettre sous la forme

$$\varphi\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0. \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

La transformée

$$\varphi\left(\frac{dy}{dt}, x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0$$

ne contient pas explicitement t, ce qui est une nouvelle simplification, comme on le verra plus bas (n° 15).

4. *Définition d'une équation aux dérivées partielles, d'après Lie* (*). Quand on considère une variable x, qui varie de $-\infty$ à $+\infty$, ou, plus généralement, qui prend toutes les valeurs imaginables, on dit qu'elle est susceptible de recevoir un nombre infini de valeurs. On peut dire, de même, que le système des deux variables x, y, peut prendre ∞^2 valeurs, que le système des trois variables x, y, z, peut prendre ∞^3 valeurs, et ainsi de suite. En général, dire que le système

$$z, x_1, \ldots, x_n,$$

peut prendre ∞^{n+1} valeurs, signifie que chacune des variables peut recevoir toutes les valeurs imaginables.

Si deux variables x, y, sont liées par une équation

$$f(x, y) = 0,$$

x peut prendre ∞ valeurs, et à chaque valeur de la variable x en correspondra seulement un certain nombre de la variable y; dans ce cas, on dira que le système (x, y) n'a que ∞ valeurs, et non ∞^2 comme dans le cas précédent. De même, $(n+1)$ variables liées entre elles par $1, 2, \ldots, n$ relations seront dites avoir $\infty^n, \infty^{n-1}, \ldots, \infty$ valeurs.

Si l'on regardre x, y, z, comme les coordonnées d'un point dans l'espace, l'ensemble des trois coordonnées x, y, z peut aussi être appelé *point*, et l'on pourra dire que l'espace contient ∞^3 points, une surface ∞^2, une courbe ∞ seulement. On peut convenir d'appeler *point*, d'une manière générale, l'ensemble de $(n+1)$ valeurs $(z, x_1, \ldots, x_n)$ dites *coordonnées*, et *espace à* (n + 1) *dimensions*, l'ensemble des points qui correspondent à toutes les valeurs possibles de ces coordonnées. Si l'on considère parmi les ∞^{n+1} points de l'espace à $(n+1)$ dimensions, ceux dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$f(z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

(*) Lie, Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 16, pp. 321-326, n° 25, pp. 473-489, et pp. 151 sqq. du grand Mémoire : *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (Mathematische Annalen, t. V, pp. 145-256). [C'est Cauchy qui s'est occupé, le premier, des espaces à un nombre quelconque de dimensions (Comptes rendus, t. XXIV, pp. 885-887).]

on a *une variété à* n *dimensions,* contenant ∞^n points. L'ensemble des points représentés par *deux, trois,..., n* équations semblables, constituent *une variété à* (n — 1), (n — 2),..., 1 *dimension.* Les points eux-mêmes peuvent être dits de dimension *nulle.*

Dans l'espace à 3 dimensions, on distingue, parmi les surfaces, celle dont l'équation est du premier degré ou le plan :

$$pX + qY - Z + P = 0.$$

Le plan est déterminé si l'on connaît ses coefficients de direction $p, q, -1$, et l'un de ses points, x, y, z. Son équation, dans ce cas, est :

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

Un point et un plan passant par ce point constituent un *élément* de l'espace. Un élément de l'espace est donc déterminé par cinq quantités, dites ses coordonnées,

$$x, y, z, p, q;$$

et, par suite, l'espace en contient ∞^5.

Parmi les éléments de l'espace, ceux dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

sont en nombre ∞^4, et sont dits *les éléments de cette équation,* ou les éléments de la figure représentée par cette équation, si l'on peut ainsi parler. Par chaque point de l'espace, passent ∞^2 plans, dont ∞ seulement constituent, avec ce point, ∞ éléments de l'équation f. Ces ∞ plans enveloppent un certain cône ayant le point commun pour sommet. En un certain sens, on peut donc dire que l'équation $f = 0$, représente aux environs de leurs sommets, ∞^3 cônes ayant chacun, en ces points, ∞ plans tangents.

Dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions, nous pouvons appeler *plan* la variété à n dimensions dont l'équation est linéaire par rapport aux coordonnées courantes. Un plan passant par un point $(z, x_1, ..., x_n)$, a pour équation

$$p_1(X_1 - x_1) + \cdots + p_n(X_n - x_n) - (Z - z) = 0,$$

et constitue avec le point lui-même un *élément de l'espace*, déterminé par les $(2n+1)$ coordonnées :

$$z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n.$$

L'espace contient ∞^{2n+1} éléments. La figure représentée par l'équation

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$$

est l'ensemble des éléments, en nombre ∞^{2n} qui satisfont à cette équation. Ces éléments sont dits les éléments de l'équation ou de la figure correspondante.

5. *Nouvelle manière d'envisager l'intégration des équations aux dérivées partielles.* Pour Lie, intégrer une équation aux dérivées partielles, à trois variables, par exemple,

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (16)$$

c'est trouver toutes les figures contenant ∞^2 des ∞^4 éléments représentés par cette équation, et telles que deux éléments infiniment voisins satisfassent à l'équation

$$dz = pdx + qdy. \qquad (17)$$

De même, intégrer une équation à $(n+1)$ variables

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \qquad (1)$$

c'est trouver toutes les figures contenant ∞^n des ∞^{2n} éléments représentés par cette équation, et telles que deux éléments voisins satisfassent à l'équation :

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n. \qquad (18)$$

Si dans l'équation (16), on suppose x, y, z constants, p, q variables, les éléments, obtenus ainsi, satisfont à l'équation (17), puisque l'on a :

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = 0;$$

mais ces éléments ne sont qu'en nombre simplement infini. De même les éléments représentés par l'équation (1) quand on y regarde le point comme fixe, satisfont à la condition (18),

mais sont seulement en nombre ∞^{n-1}. Les figures correspondantes ne sont donc pas des intégrales.

Les équations (5) et (6) du n° 2, qui donnent ∞^{n+1} éléments de l'équation (4), transformée de (1), n'en donnent plus que ∞^n quand on suppose F constant. De même l'équation (12) du n° 5 et les valeurs de $\frac{dy}{dt}, \frac{dy}{dx_1}, \dots, \frac{dy}{dx_n}$ que l'on en déduit, représentent ∞^{n+1} éléments de l'équation (11), et donnent, par suite, une intégrale de cette équation (11); mais si l'on suppose l'existence de la relation (15) ou (9), ces éléments ne sont plus qu'au nombre de ∞^n, et donnent une intégrale de l'équation (1).

§ 2. *Génération des équations à trois variables. Théorie de Lagrange* (*).

6. *Génération de ces équations, de trois manières différentes.* Soit

$$z = F(x, y, a, b) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

une relation entre x, y, z, où entrent deux constantes arbitraires a et b. On déduira de là :

$$p = F'_x(x, y, a, b) \quad q = F'_y(x, y, a, b) \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Éliminant a et b entre ces trois équations, on aura

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad z = \varphi(x, y, p, q), \quad \dots\dots \quad (3)$$

équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(*) La distinction des trois sortes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre est due à Lagrange (Mémoires de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, n° 12, p. 572; 1774, Œuvres, t. IV, n° 41, p. 65, n° 47, p. 74; *Leçons, etc.*, pp. 367 et suivantes). Voir aussi, Pfaff (Mémoires de Berlin, 1814-1815), *passim*, et Jacobi, *Ueber die Pfaffsche Methode, etc.* (Journal de Crelle, t. II, pp. 348-349), et surtout, *Vorlesungen*, pp. 471-509. Nous nous servons principalement ici de l'exposition d'Imschenetsky, chapitre I, pp. 9-19. Graindorge, I, pp. 1-9, est moins complet.

Nous recommandons au lecteur une exposition plus simple de cette théorie, donnée plus bas à propos des équations simultanées, et qui ne semble pas avoir été remarquée (n° 12).

Si l'on remplace a et b par des fonctions convenables de x et de y, il peut arriver que l'équation (1) conduise à la même équation (3); il suffira, pour cela, que les nouvelles valeurs de p et q:

$$p = \mathrm{F}'_x + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a}\frac{da}{dx} + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b}\frac{db}{dx},$$

$$q = \mathrm{F}'_y + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a}\frac{da}{dy} + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b}\frac{db}{dy},$$

se réduisent aux anciennes, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a}\frac{da}{dx} + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b}\frac{db}{dx} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a}\frac{da}{dy} + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b}\frac{db}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On déduit de ces dernières :

$$\mathrm{D}\frac{a, b}{x, y} \cdot \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a} = 0, \quad \mathrm{D}\frac{a, b}{x, y} \cdot \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

relations auxquelles on satisfait : 1° en posant

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

2° en posant

$$\mathrm{D}\frac{a, b}{x, y} = 0 \quad \text{ou} \quad b = \pi a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

π désignant une fonction quelconque. Dans ce cas, les deux équations (4) se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a} + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta b}\frac{\delta \pi}{\delta a} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Les deux équations (6), ou les équations (7) et (8) suffisent pour déterminer les fonctions a et b.

Nous verrons dans le numéro suivant que toutes les solutions de l'équation (2) sont comprises parmi les solutions données, soit par l'équation (1), dite *intégrale complète* de (2), ou par les équations (1), (7), (8), où π est arbitraire, ce qui constitue l'*intégrale générale*, ou enfin, par les équations (1) et (6), qui fournissent la *solution* ou *intégrale singulière*.

Géométriquement, l'équation (3) exprime une propriété des lans tangents aux surfaces représentées par l'intégrale complète, u des enveloppes de celles ci, que donne l'intégrale générale, u enfin des enveloppes d'un autre genre représentées par l'intérale singulière. Les premières enveloppes touchent les suraces (1), chacune suivant une courbe donnée par les équations (1), 7), (8), les secondes en des points donnés par (1) et (6).

7. *Toutes les intégrales de l'équation* (3) *sont données par* (1), 1) *et* (6), *ou* (1), (7), (8). Soit

$$z = \psi(x, y) \qquad (9)$$

ne relation satisfaisant à l'équation (3), c'est-à-dire telle que

$$\psi(x, y) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \qquad (10)$$

soit une identité. Posons :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad (11)$$

et tirons de là les valeurs de a et b, qui seront constantes ou non. Pour ces valeurs de a et b, on aura identiquement, puisque F est une solution de (3) :

$$F(x, y, a, b) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right); \qquad (12)$$

ou, à cause des relations (10) et (11),

$$F(x, y, a, b) = \psi(x, y). \qquad (13)$$

Ainsi l'équation (9) devient identique à l'équation (1), si a et b ont les valeurs déduites des équations (11). De plus, ces valeurs de a et b satisfont aux équations (4), si elles ne sont pas constantes. On a, en effet, pour ces valeurs de a et b :

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$q = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dy} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dy} = \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

d'où, au moyen des équations (11) :

$$\frac{\delta F}{\delta a}\frac{da}{dx}+\frac{\delta F}{\delta b}\frac{db}{dx}=0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta a}\frac{da}{dy}+\frac{\delta F}{\delta b}\frac{db}{dy}=0.$$

Ce sont précisément les relations (4). Ainsi, l'équation (9) est comprise dans l'une des trois intégrales dont il est parlé au n° précédent.

On remarquera que deux des équations (11) et (13) entraînent la troisième, de sorte que l'on peut déterminer a et b, au moyen de deux quelconques de ces trois relations.

8. *Extension de la théorie précédente au cas d'une relation implicite entre* x, y, z. L'équation

$$F(x, y, z, a, b)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

donne, par dérivation :

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta z}p=0, \quad \frac{\delta F}{\delta y}+\frac{\delta F}{\delta z}q=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

et, par élimination de a et b, entre ces dernières équations :

$$f(x, y, z, p, q)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

si a et b sont des constantes, ou des fonctions de x et y telles que

$$\left(\frac{\delta F}{\delta a}\frac{da}{dx}+\frac{\delta F}{\delta b}\frac{db}{dx}\right):\frac{\delta F}{\delta z}=0, \quad \left(\frac{dF}{\delta a}\frac{da}{dy}+\frac{\delta F}{\delta b}\frac{db}{dy}\right):\frac{\delta F}{\delta z}=0. \quad . \quad (4')$$

On déduit de ces dernières, comme plus haut,

$$\mathrm{D}\frac{a, b}{x, y}\times\frac{-\frac{\delta F}{\delta a}}{\frac{\delta F}{\delta z}}=0, \quad \mathrm{D}\frac{a, b}{x, y}\times\frac{-\frac{\delta F}{\delta b}}{\frac{\delta F}{\delta z}}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

relations auxquelles on satisfait : 1° en posant :

$$\frac{-\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0, \quad \frac{-\frac{\partial F}{\partial b}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{da} = 0, \quad \frac{dz}{db} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

2° ou bien :

$$\mathrm{D}\frac{a, b}{x, y} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \pi(a, b) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

π désignant une fonction quelconque. Dans ce dernier cas, les équations (5′), à cause des relations suivantes, déduites de (7′) :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a} : \frac{\partial \pi}{\partial b} = -\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = -\frac{db}{dy} : \frac{da}{dy},$$

deviennent l'une et l'autre

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\partial F}{\partial b} \times \frac{\frac{\partial \pi}{\partial a}}{\frac{\partial \pi}{\partial b}}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dz}{da} + \frac{dz}{db}\frac{db}{da} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

Les deux équations (6′), ou les équations (7′) et (8′), suffisent pour déterminer les fonctions a et b.

Toute relation

$$\psi(x, y, z) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

satisfaisant à l'équation (5′), c'est-à-dire telle que les valeurs z_1, p_1, q_1 de

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy},$$

que l'on en déduit, donnent identiquement :

$$f(x, y, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

appartient à l'une des trois classes de solutions indiquées plus haut. En effet, déterminons a et b, par les relations :

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11')$$

p et q étant les valeurs déduites de (2′). En comparant l'équation (10′) à

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

et tenant compte de (11′), il viendra :

$$z = z_1.$$

On prouvera ensuite, comme plus haut, que les valeurs a et b déterminées par les équations (11′) satisfont aux équations (4′), ce qui achève la démonstration du théorème (*).

Remarque. L'intégrale générale, donnée par les équations (1′) (7′) (8′) ne comprend pas, en général, la solution singulière, donnée par (1′), (6′). En effet, les équations (7′) (8′) donnent le plus souvent :

$$\frac{\frac{dz}{da}}{\frac{\delta\pi}{\delta a}} = \frac{\frac{dz}{db}}{\frac{\delta\pi}{\delta b}}$$

qui n'a pas pour corollaires les équations (6).

L'intégrale complète peut se déduire de l'intégrale générale, en

(*) Les explications de ce numéro auraient été inutiles, si Imschenetsky, § 6, pp. 18-19, Graindorge, n° 10, pp. 7-9, n'avaient laissé de côté le dénominateur $\frac{\delta F}{\delta z}$. On sait, par la théorie des solutions singulières des équations différentielles ordinaires, que l'on doit soigneusement éviter de faire disparaître les dénominateurs de ce genre, parce que seuls, très-souvent, ils conduisent à la solution cherchée, quelque forme que l'on donne à la fonction F, quand les infinis de $\frac{\delta F}{\delta z}$ sont à une distance finie. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, t. IV, p. 158, note 2) a méconnu l'importance de cette remarque.

faisant entrer deux constantes arbitraires dans π. Il est clair, d'ailleurs, que l'on peut trouver une infinité d'intégrales complètes (*).

9. Exemples (**). I. L'équation

$$z = a + bx + bmy$$

donne

$$p = b, \quad q = bm,$$
$$q = mp.$$

La solution singulière n'existe pas, car les équations (6) sont

$$\frac{dz}{da} = 1 = 0, \quad \frac{dz}{db} = x + my = 0,$$

dont la première est absurde. L'intégrale générale est donnée par élimination de a et b entre

$$z = a + b(x + my),$$
$$b = \pi a,$$
$$0 = 1 + \pi' a (x + my),$$

ce qui conduit à

$$z = \chi(x + my),$$

χ désignant une fonction quelconque.

II. Soit

$$z = a + bx + yf(a, b).$$

On aura :

$$p = b, \quad q = f(a, b).$$

(*) Lagrange (Mém. de Berl., 1774, Œuvres, t. IV, p. 80). La théorie complète des relations qui existent entre les intégrales complètes a été esquissée par Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 471-509, et en divers endroits de ses mémoires, et par Mayer, Math. Annalen, t. III, pp. 449-452 et Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 21, pp. 405-420 ; mais ce difficile sujet ne peut être traité qu'au moyen de la théorie générale des transformations de Lie, que ce géomètre n'a pas encore publiée (voir Nachrichten, 1872, p. 484). C'est pourquoi nous nous contentons d'exposer la partie absolument nécessaire des recherches de ces géomètres.

(**) Lagrange (Mém. de Berlin, 1774, Œuvres, t. IV, n° 39, pp. 63-64; n° 49, pp. 75 et suivantes).

On tire de là l'équation :

$$q = f(z - px - qy, p).$$

III. *Équation de Clairaut généralisée.* Nous appelons ainsi l'équation que l'on déduit de

$$z = ax + by + f(a, b),$$

en éliminant a et b, au moyen des relations suivantes, trouvées par dérivation,

$$p = a, \quad q = b.$$

L'équation aux dérivées partielles est donc

$$z = px + qy + f(p, q).$$

L'intégrale générale de celle-ci est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} z &= ax + by + f(a, b), \\ b &= \pi a, \\ 0 &= x + y\pi' a + \frac{\delta f}{\delta a} + \frac{\delta f}{\delta b}\pi' a. \end{aligned}$$

Elle représente une surface développable, enveloppe du plan dont l'équation est l'intégrale complète.

La solution singulière

$$z = ax + by + f(a, b)$$

$$x + \frac{\delta f}{\delta a} = 0, \quad y + \frac{\delta f}{\delta b} = 0,$$

représente une surface tangente à chacun de ces plans en un point, ou à chaque surface développable suivant une courbe (comparez le n° 21).

IV. Comme exemple d'équation de Clairaut généralisée, soit à résoudre le problème suivant : « *Trouver les surfaces dont le plan tangent est à une distance constante* h *de l'origine des coordonnées.* » L'équation du problème est

$$z = px + qy + h\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

L'intégrale complète est l'équation d'un plan quelconque, situé à une distance h de l'origine :

$$z = ax + by + h\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

La solution singulière est la sphère,

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,$$

tangente à tous ces plans.

L'intégrale générale représentera une surface développable quelconque circonscrite à cette sphère. Si l'on fait, par exemple,

$$am + bn = 1,$$

on trouve un cylindre de révolution; car cette relation équivaut, dans le cas actuel, à

$$mp + nq = 1$$

à cause de $p = a$, $q = b$ (voir n° 20).

Si l'on fait

$$h\sqrt{1 + a^2 + b^2} = k - ma - nb,$$

on trouve un cône, qui sera encore de révolution, puisqu'il est circonscrit à la sphère. En effet, on a, dans ce cas :

$$z = ax + by + (k - ma - nb),$$

et

$$z - k = p(x - m) + q(y - n),$$

qui appartient au cône ayant pour sommet (m, n, k) (voir n° 20).

On peut remarquer, avec Lagrange, à propos de cet exemple, qu'il est impossible de déterminer π de manière que l'intégrale générale

$$z = ax + y\,\pi a + h\sqrt{1 + a^2 + (\pi a)^2},$$

$$0 = x + y\pi' a + h\,\frac{a + \pi a . \pi' a}{\sqrt{1 + a^2 + (\pi a)^2}},$$

représente la sphère. On ne peut, en effet, éliminer x, y et z entre les deux équations que nous venons d'écrire et celle de la sphère. D'ailleurs, ces deux équations représentent une surface

développable, et l'on sait que la sphère, analytiquement parlant, est, comme toutes les surfaces du second degré à centre unique, une surface gauche; chaque génératrice est imaginaire, sauf en un point.

§ 3. *Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lagrange* (*).

10. *Génération de ces équations, de trois manières différentes.* Soit la relation

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

On en déduit :

$$p_1 = \frac{\delta F}{\delta x_1}, \; p_2 = \frac{\delta F}{\delta x_2}, \ldots, p_n = \frac{\delta F}{\delta x_n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

En éliminant $a_1, \ldots, a_n$, entre les équations (1) et (2), on trouvera une équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

ou

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

On trouve la même équation (3) en supposant que $a_1, \ldots, a_n$ soient des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, telles que l'on ait :

$$\frac{\delta F}{\delta a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \cdots\cdots + \frac{\delta F}{\delta a_n}\frac{da_n}{dx_1} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\delta F}{\delta a_1}\frac{da_1}{dx_n} + \cdots\cdots + \frac{\delta F}{\delta a_n}\frac{da_n}{dx_n} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4_n)$$

On déduit de ces relations, en posant

$$\Delta = D\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n}:$$

$$\Delta\frac{\delta F}{\delta a_1} = 0, \; \Delta\frac{\delta F}{\delta a_2} = 0, \ldots, \Delta\frac{\delta F}{\delta a_n} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

(*) Nous réduisons ce qui se rapporte aux équations à n variables indépendantes au strict nécessaire, les principes ayant été suffisamment exposés dans le paragraphe précédent.

On satisfait à ces dernières de diverses manières : 1° en posant

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial a_2}=0,\ldots,\frac{\partial F}{\partial a_n}=0\,,\ \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

équations qui suffisent pour déterminer les fonctions a; 2° en posant

$$\mathrm{D}\frac{a_1\ldots a_n}{x_1\ldots x_n}=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Cette équation (7) sera vérifiée chaque fois que les fonctions a_1, $a_2,\ldots,a_n$ ne seront pas indépendantes les unes des autres. Soit $n=(m+k)$, et, pour simplifier les écritures, écrivons $b_1, b_2,\ldots, b_m$, au lieu de $a_{k+1}, a_{k+2},\ldots, a_n$. Pour satisfaire à l'équation (7), nous écrirons :

$$b_1=\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_k),\ \ldots\ldots\ldots \quad (7'_1)$$

$$b_2=\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_k),\ \ldots\ldots\ldots \quad (7'_2)$$

. . . .

$$b_m=\pi_m(a_1, a_2, \ldots, a_k).\ \ldots\ldots\ldots \quad (7'_m)$$

On aura donc, pour l'une quelconque des quantités b,

$$\frac{db}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx}+\frac{\partial\pi}{\partial a_2}\frac{da_2}{dx}+\cdots+\frac{\partial\pi}{\partial a_k}\frac{da_k}{dx}.\ \ldots\ldots \quad (7'')$$

Il en résulte que chacune des équations (4) prend la forme

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}+\frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial\pi_1}{\partial a_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial\pi_m}{\partial a_1}\right)\frac{da_1}{dx}+\cdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{\partial F}{\partial a_k}+\frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial\pi_1}{\partial a_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial\pi_m}{\partial a_k}\right)\frac{da_k}{dx}=0\end{array}\right\}\ \ldots\ldots \quad (4')$$

Multiplions les équations $(4'_1)$ $(4'_2)$ $(4'_3)$ ... (4_k) respectivement par $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots, dx_k$, ajoutons les résultats, il viendra :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}+\frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial\pi_1}{\partial a_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial\pi_m}{\partial a_1}\right)da_1+$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_k}+\frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial\pi_1}{\partial a_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial\pi_m}{\partial a_k}\right)da_k=0.$$

Les fonctions $a_1, a_2, \ldots a_k$ sont indépendantes les unes des autres, et, par suite, leurs différentielles sont arbitraires; on tire donc, de l'équation précédente, les k relations :

$$\frac{\delta F}{\delta a_1}+\frac{\delta F}{\delta b_1}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_1}+\cdots+\frac{\delta F}{\delta b_m}\frac{\delta \pi_m}{\delta a_1}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{da_1}=0, \quad . \; . \; . \quad (8_1)$$

. . . .

$$\frac{\delta F}{\delta a_k}+\frac{\delta F}{\delta b_1}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_k}+\cdots+\frac{\delta F}{\delta b_m}\frac{\delta \pi_m}{\delta a_k}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{da_k}=0. \quad . \; . \; . \quad (8_k)$$

Les relations (7) et (8) suffiront pour déterminer les fonctions a et b. Les cas les plus remarquables sont ceux où $m=1$ et où $m=(n-1)$. Si $m=1$, $k=(n-1)$, et les équations (7′) et (8) deviennent :

$$a_n=\pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7''')$$

$$\frac{\delta F}{\delta a_1}+\frac{\delta F}{\delta a_n}\frac{\delta \pi}{\delta a_1}=0, \ldots, \frac{\delta F}{\delta a_{n-1}}+\frac{\delta F}{\delta a_n}\frac{\delta \pi}{\delta a_n}=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8')$$

Si $m=(n-1)$, $k=1$, et les équations (7′) et (8) deviennent

$$a_1=\pi_1(a_n), \quad a_2=\pi_2(a_n), \ldots, a_{n-1}=\pi_{n-1}(a_n),$$

$$\frac{\delta F}{\delta a_1}\pi'_1 a_n+\frac{\delta F}{\delta a_2}\pi'_2 a_n+\cdots+\frac{\delta F}{\delta a_{n-1}}\pi'_{n-1} a_n+\frac{\delta F}{\delta a_n}=0.$$

La solution (1) de l'équation (3), est l'*intégrale complète*; la solution donnée par les relations (1) et (6) est la *solution singulière*; la solution donnée par les relations (1), (7‴), (8′) est l'*intégrale générale*; les autres solutions données par (1), (7′), (8) n'ont pas reçu de nom particulier. Elles sont intermédiaires entre la *solution singulière* et *l'intégrale générale*; on peut les appeler *intégrales semi-singulières*.

Ce qui précède peut s'exposer facilement encore, quand la relation (1) entre z, les x et les a est donnée sous forme implicite.

11. *Toute intégrale de l'équation* (3) *est comprise dans les précédentes*. Soit

$$z=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

une solution de (5), c'est-à-dire supposons que

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Posons

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

et tirons de là les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour ces valeurs, on aura identiquement, puisque F est une solution de (5),

$$F(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_n) = \varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_n};$$

d'où, au moyen des équations (11), $F = \psi$ et les équations (4). La solution $z = \psi$ est donc comprise parmi celles qui ont été données au numéro précédent. On peut encore déduire les quantités a de l'équation (12) et de $(n - 1)$ des équations (11).

Si la solution (9) était donnée sous forme d'une relation implicite entre z et les x, on pourrait faire encore la démonstration précédente.

Il résulte d'ailleurs de tout ce que nous venons de démontrer qu'*il suffit d'avoir la solution complète d'une équation aux dérivées partielles pour en connaître toutes les solutions*. Ainsi, par exemple, toutes les solutions de l'*équation de Clairaut généralisée* (comparez le n° 28)

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

peuvent se déduire de l'intégrale générale : complète

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

[**12**. *Génération des équations aux dérivées partielles simultanées* (*). Considérons la relation

$$z = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m), m < n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

On en déduit

$$p_1 = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_1}, \cdots, p_n = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

En éliminant $a_1, \ldots, a_m$, entre ces $(n + 1)$ équations, on trouve le système suivant de $k = (n + 1 - m)$ équations simultanées, aux dérivées partielles et du premier ordre,

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_k = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

chacune des fonctions f dépendant de l'ensemble ou d'une partie des quantités $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

On trouve les mêmes équations (3′), si l'on suppose que $a_1, \ldots, a_m$, soient des fonctions des variables telles que

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_1} da_1 + \cdots + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_m} da_m = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

car, dans ce cas, on aura

$$dz = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_m} dx_m,$$

relation équivalente aux équations (2′). L'équation (4′) elle-même est équivalente aux n équations

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_1} \frac{da_1}{dx} + \cdots + \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_m} \frac{da_m}{dx} = 0.$$

Pour satisfaire à l'équation (4′) on peut poser, en premier lieu,

$$da_1 = 0, \ldots, da_m = 0,$$

ce qui conduit à l'*intégrale complète* (1′).

En second lieu, on peut se donner les équations

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_1} = 0, \ldots, \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta a_m} = 0,$$

ce qui conduit à la *solution singulière*.

(*) Le lecteur remarquera que ce numéro 12 contient, sous une forme extrêmement condensée, tous les résultats précédents relatifs à la génération des équations aux dérivées partielles.

En troisième lieu, on peut supposer

$$a_m = \pi(a_1, ..., a_{m-1}),$$

ce qui donne

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi}{\delta a_1} = 0, ..., \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi}{\delta a_{m-1}} = 0;$$

ou

$$a_{m-1} = \pi_1(a_1, ..., a_{m-2}); \; a_m = \pi_2(a_1, ..., a_{m-2}),$$

ce qui donne

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi_2}{\delta a_1} = 0,$$

. . . .

$$\frac{\delta F}{\delta a_{m-2}} + \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_{m-2}} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi_2}{\delta a_{m-2}} = 0;$$

et ainsi de suite.

Enfin, on peut faire des hypothèses intermédiaires entre les précédentes, par exemple, poser

$$da_1 = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta a_2} = 0, \quad a_m = \pi(a_3, ..., a_{m-1}).$$

Dans tous les cas, on est conduit à un nombre d'équations suffisant pour déterminer toutes les quantités a.

Toute solution,

$$z = \psi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

est comprise parmi les précédentes. Les valeurs de z et des quantités p déduites de la valeur de z satisfont aux équations (5'), et par suite aux équations équivalentes (1') (2'). On a donc

$$\psi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m), \quad \text{. . . . . . (10')}$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta x_1} = \frac{\delta F}{\delta x_1}, ..., \frac{\delta \psi}{\delta x_n} = \frac{\delta F}{\delta x_n}. \quad \text{. . . . . (11')}$$

Tirons de la première de ces équations, par différentiation, la suivante :

$$\frac{\delta \psi}{\delta x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\delta \psi}{\delta x_n}dx_n = \frac{\delta F}{\delta x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\delta F}{\delta x_n}dx_n$$
$$+ \frac{\delta F}{\delta a_1}da_1 + \cdots + \frac{\delta F}{\delta a_m}da_m. \quad \text{. . . . . (13')}$$

Les valeurs des quantités a tirées de m des équations (10') et (11')

satisfont aux autres équations (10′) et (11′) et par suite à l'équation (13′). Or celle-ci, à cause des relations (11′), se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_m} da_m \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Donc, enfin, la solution $z = \psi$ est comprise parmi celles auxquelles conduit cette relation (4′).

REMARQUE. Les fonctions f du système simultané (3′) ont entre elles des relations identiques, comme on le verra à propos de la méthode de Jacobi.]

§ 4. *Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lie.*

13. *Génération d'une équation aux dérivées partielles, au moyen de plusieurs équations primitives* (*). I. Considérons une variété à $(n - m + 1)$ dimensions définies par m équations contenant, outre les variables, n constantes arbitraires :

$$F_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$F_m(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_m)$$

Cherchons l'ensemble des éléments passant par les points de cette variété et tels que l'on ait

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour cela, considérons la variété à n dimensions dont l'équation est

$$F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{m-1} F_{m-1} + F_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ étant des constantes arbitraires. Tous les points de la variété (1) font partie de la variété (3). Cherchons, en ces points de (3), les éléments qui satisfont à la condition (2); pour cela, nous devons écrire les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) SOPHUS LIE : *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben* (Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 473-489, n° 25), pp. 480-482.

En éliminant $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, entre les équations (1) et (4), nous trouverons une équation aux dérivées partielles,

$$f(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

dont tous les éléments satisferont à la condition (2) et auront leurs points sur la variété (1).

Réciproquement, l'équation (5) représente tous les éléments définis par les équations (1) et (2). On déduit, en effet, de l'équation (1), en se servant de la valeur (2) de dz :

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx_n = 0, \quad . \; . \quad (6_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}\right) dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_m}{\partial z}\right) dx_n = 0. \quad . \; . \quad (6_m)$$

On voit par là que $(n - m)$ seulement des différentielles dx sont arbitraires, pour les éléments représentés par les équations (1) et (2). Pour éliminer m différentielles des équations (6), multiplions ces équations respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ et l'unité, et ajoutons-les; égalons à zéro les coefficients de m différentielles, en vue de l'élimination, puis les coefficients des autres, à cause de l'indépendance de ces différentielles restantes. Ces calculs nous conduisent aux équations (4). Ce sont les conditions nécessaires pour que les éléments qui satisfont aux équations (1) satisfassent aussi à l'équation (2).

Donc, enfin, les équations (1) et (4) représentent les éléments cherchés, et la résultante (5) de ces équations est l'équation unique de ces ∞^{2n} éléments.

[II. Imaginons que les équations (1) soient résolues par rapport à m des constantes, et appelons les $(n - m) = k$ restantes, $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Supposons que les nouvelles équations ainsi obtenues soient les suivantes

$$H_1(z, x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_k) - a_1 = 0 \; . \; \ldots \ldots \quad (1'_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_m(z, x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_k) - a_m = 0. \; \ldots \ldots \quad (1'_m)$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on sera amené à éliminer les quantités a, b et λ entre ces m équations (1′), et les suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4')$$

La fonction H est définie par l'équation

$$H = \lambda_1 (H_1 - a_1) + \lambda_2 (H_2 - a_2) + \cdots + \lambda_{m-1} (H_{m-1} - a_{m-1}) + (H_m - a_m),$$

ou encore,

$$H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_{m-1} H_{m-1} + H_m + h,$$

en posant

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_{m-1} a_{m-1} + a_m + h.$$

Les quantités $a_1, \ldots, a_m$ n'entrent pas dans les équations (4′); donc l'élimination des quantités a, b, λ, entre les équations (1′) (4′) revient à celle des quantités b et λ entre les équations (4′).

Enfin, si l'on considère la relation unique

$$H - h = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1'')$$

et si l'on cherche l'équation aux dérivées partielles du premier ordre correspondante, on sera aussi conduit à éliminer les constantes b et λ entre les équations (4′).

Par conséquent, l'équation

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

est celle des éléments représentés par les équations (1) et (2), ou (1′) et (2), ou (1″) et (2), et il suffira de trouver une solution (1″) de cette équation (5), pour connaître implicitement la solution (1′) ou (1).]

14. *Classification des équations aux dérivées partielles.* Des considérations précédentes résulte la classification suivante des équations aux dérivées partielles (*).

I. *L'équation provient de* (n + 1) *relations analogues à* (1).

(*). Lie, *Zur Theorie*, etc. (Nachrichten, p. 485).

Dans ce cas, on peut éliminer les constantes a entre ces équations, ce qui conduit à une relation

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

qui ne contient pas les p. Cette équation représente, en un certain sens, ∞^{2n} éléments, savoir, en chacun des ∞^n points de cette variété à n dimensions, les ∞^n éléments obtenus, en faisant varier $p_1, \ldots, p_n$ de toutes les manières possibles. Ces éléments satisfont à l'équation (2), puisque les quantités $dz, dx_1, \ldots, dx_n$, sont toutes nulles.

II. *L'équation* (5) *provient de* n *relations analogues à* (1). On verra (n° 23) que, dans ce cas, l'on arrive à une équation linéaire.

III. *L'équation provient de* (n — 1), (n — 2), ..., 2 *relations analogues à* (1). On trouve, de cette manière, (n—2) classes d'équations *semi-linéaires,* si l'on peut ainsi les nommer. Lie annonce qu'il est parvenu à les ramener aux équations linéaires. Nous n'avons pu reconstruire sa démonstration (*). La méthode de Cauchy, telle que nous l'exposons, s'applique directement à ce cas, comme au cas des équations linéaires (comparez n° 109).

IV. *L'équation provient d'une seule relation analogue à* (1). C'est le cas ordinaire des équations non linéaires.

[Plus simplement, l'équation (5) peut provenir d'une relation de la forme (1″) contenant *linéairement* I. n constantes; II. (n— 1) constantes; III. (n — 2), (n — 5), ... 1, constante; ou enfin, IV. pas de constante.]

[**15**. *Des constantes supplémentaires* (**). Il arrive souvent, dit Jacobi, que les calculs qui servent à trouver une solution complète d'une équation aux dérivées partielles, conduisent naturellement à introduire dans cette solution un nombre de constantes, plus grand que celui des variables indépendantes; et l'on détruit la symétrie des calculs, si l'on pose un certain nombre des constantes supplémentaires égal à zéro. On suppose d'ailleurs que ces

(*) Lie, *Zur Theorie*, etc. (Nachrichten, pp. 486-487).

(**) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 475-481, est à peu près le seul auteur qui s'occupe de cette question. Il la traite d'une manière analytique. Nous avons cru préférable et plus clair d'en dire ici quelques mots, en nous servant des idées fondamentales de Lie.

constantes ne peuvent pas se réduire à un moindre nombre, en prenant pour nouvelles constantes des fonctions des premières. Dans ce cas, au point de vue pratique, le mieux est de considérer les constantes supplémentaires comme des constantes ayant une valeur spéciale, mais quelconque. On en trouvera un exemple, plus bas, dans l'intégration de l'*équation de Schläfli* (§ 12).

La manière dont Lie envisage la nature des équations aux dérivées partielles permet d'expliquer l'introduction de ces constantes supplémentaires, comme nous allons le faire voir sur un exemple très-simple. Cet exemple nous permettra, en même temps, de faire comprendre comment il peut exister plusieurs intégrales complètes absolument équivalentes, pour une seule et même équation aux dérivées partielles (*).

Trouver une surface dont le plan tangent fasse un angle constant r *avec un plan donné.* Prenons le plan donné pour plan des xy et une perpendiculaire à ce plan, pour axe des z. L'équation du problème sera :

$$1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 r} \text{ ou } k^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

On trouve aisément que les plans représentés par l'équation

$$z-c=Ax+By, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où

$$A^2+B^2=k^2-1,$$

satisfont à la question. L'équation (1) représente ∞^4 éléments faisant un angle r avec le plan des xy; l'équation (2) et celles que l'on en déduit,

$$p=A, \quad q=B, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

représentent les mêmes ∞^4 éléments.

Si l'on prend, au lieu de l'équation (2), l'équation

$$(z-c)=A(x-a)+B(y-b), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 491-509, s'occupe de ce sujet, qui n'est pas encore complètement élucidé. Voir, plus bas (§ 32), à propos de la méthode de Lie, quelques-unes des recherches de Mayer, sur lesquelles est basée l'exposition qu'il a donnée de la méthode du géomètre norwégien.

cette équation (3) pourra se réduire à la forme (2), et satisfera à l'équation (1). Mais on peut aussi envisager cette équation (3) et celles que l'on en déduit

$$p = A, \quad q = B, \ldots \ldots \ldots \quad (3')$$

comme représentant ∞^2 fois les ∞^4 éléments représentés par (2) et (2'). En effet, pour chaque valeur de a et de b, l'équation (3) a la même étendue que l'équation (2).

L'enveloppe des plans représentés par l'équation (3), quand

$$A^2 + B^2 = k^2 - 1,$$

est le cône dont l'équation est :

$$(z - c)^2 = (k^2 - 1)\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right] \ldots \ldots \quad (4)$$

Ce cône est une surface qui satisfait à la question. Si l'on regarde a et b, comme des constantes arbitraires dans l'équation (4), elle est une solution complète; avec les équations

$$(z - c)\,p = (k^2 - 1)(x - a), \quad (z - c)\,q = (k^2 - 1)(y - b), \ldots \quad (4')$$

la relation (4) représente les ∞^4 éléments de l'équation (1). Mais si l'on suppose que c est aussi une constante arbitraire, les équations (4) et (4') représentent une infinité de fois les mêmes ∞^4 éléments.

En un certain sens, les équations (4) et (4') représentent ∞^5 éléments de l'espace, comme les équations

$$z^2 + d = (k^2 - 1)\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right], \ldots \ldots \quad (5)$$

$$zp = (k^2 - 1)(x - a), \quad zq = (k^2 - 1)(y - b). \ldots \ldots \quad (5')$$

Mais les ∞^5 éléments représentés par (5) et (5') sont tous distincts, et il n'y en a que ∞^4 qui soient représentés par l'équation (1), ceux pour lesquels $d = 0$; les éléments représentés par (4) et (4') satisfont tous à l'équation (1), mais ils ne sont pas tous distincts; ce sont ∞ fois les ∞^4 éléments de l'équation (1).

En général, toute équation

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s}) = 0, \ldots \ldots \quad (6)$$

solution d'une équation aux dérivées partielles

$$f(z, x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

et contenant s constantes supplémentaires, représentera, avec les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (6')$$

∞^s fois les ∞^{2n} éléments de l'équation (7). Nous supposons, bien entendu, que les relations (6) et (6') transforment l'équation (7) en une identité, sans quoi il n'y aurait pas, dans (6), s constantes supplémentaires, mais seulement un moindre nombre.

En particulier, *il y a un cas, où il est toujours facile d'introduire dans une solution complète une constante supplémentaire.* C'est celui où la variable z, ou l'une des variable x_i, n'entre pas d'une manière explicite dans l'équation donnée. Dans ce cas, il est clair que l'on peut, dans la solution, remplacer, sans inconvénient, z par $(z - a)$, x_i par $(x_i - a_i)$, a et a_i étant des constantes arbitraires, puisque

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(z-a)}{dx}, \quad \frac{dz}{dx_i} = \frac{dz}{d(x_i - a_i)}.$$

Les constantes qui accompagnent celles des variables qui n'entrent pas explicitement dans l'équation donnée sont appelées, par les géomètres allemands, *constantes additives.* Faire varier une de ces constantes équivaut à une translation dans l'espace du système des éléments de l'équation. Il est clair qu'il suffit de trouver une solution avec $(n - t)$ constantes non additives, pour une équation où manquent t variables. Il est facile, en effet, d'en déduire une solution avec n constantes arbitraires, en introduisant t constantes additives.]

LIVRE I.

MÉTHODE DE LAGRANGE ET DE PFAFF (*).

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (**).

§ 5. *Équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.*

16. *Génération de ces équations.* Soient u et v deux fonctions données des variables x, y, z, et

$$F(u, v) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) Nous résumons, dans ce premier livre, non-seulement les travaux de Lagrange et de Pfaff, mais aussi les premiers mémoires de Jacobi, qui relient entre elles les recherches de ces deux géomètres.

(**) La théorie des équations linéaires aux dérivées partielles est due essentiellement à Lagrange, qui l'a exposée, sous diverses formes, dans les Mémoires de Berlin de 1779 et 1785, dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, leçon 20, et dans la *Théorie des fonctions analytiques*, ch. XVI de la première partie Sur la vraie portée du procédé d'intégration exposé ici, voir le § I du mémoire de Jacobi : *Dilucidationes*, *etc.* (Journal de Crelle, t. 23). Au fond, on ne fait qu'établir la connexion qui existe entre la théorie des équations linéaires différentielles simultanées et celles des équations linéaires aux dérivées partielles. Nous nous sommes aidé, dans notre exposition, de celle de Serret, *Calcul intégral*, pp. 599-608, et de Boole, *A treatise*, *etc.*, pp. 324-333, *Suppl.*, pp. 56-69.

une relation quelconque entre ces fonctions. Il existe entre x, y, z et les dérivées partielles

$$p=\frac{dz}{dx}, \quad q=\frac{dz}{dy},$$

de z par rapport à x et à y, une relation indépendante de la forme de l'équation (1), et linéaire en p et q.

Pour le montrer, dérivons la relation (1) par rapport à x et à y; il viendra :

$$\frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta z}p\right)+\frac{\delta F}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta z}p\right)=0,$$
$$\frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta z}\right)q+\frac{\delta F}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta z}q\right)=0.$$

D'où, en éliminant les dérivées de F par rapport à u et à v,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta z}p, & \frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta z}q \\ \frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta z}p, & \frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta z}q \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}, & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x}, & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta z}, & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta z}, & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}, & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x}, & \frac{\delta v}{\delta z} \end{vmatrix} = 0;$$

ou encore, en employant la notation des déterminants fonctionnels,

$$p\,D\frac{u,v}{y,z}+q\,D\frac{u,v}{z,x}=D\frac{u,v}{x,y}.$$

Nous écrirons cette équation sous la forme abrégée

$$Xp+Yq=Z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en posant

$$X=D\frac{u,v}{y,z}, \quad Y=D\frac{u,v}{z,x}, \quad Z=D\frac{u,v}{x,y}.$$

17. *Système d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation* (2) (*). D'après les propriétés des déterminants, on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Il résulte de ces équations que les relations,

$$u = a, \quad v = b,$$

où a et b sont des constantes, forment un système intégral des équations :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

On peut encore énoncer cette remarque sous une autre forme, en disant que les équations

$$Y = \frac{dy}{dx}X,$$

$$Z = \frac{dz}{dx}X,$$

ont, pour système intégral,

$$u = a, \quad v = b; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ou encore,

$$F_1(u, v) = A, \quad F_2(u, v) = B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A et B étant de nouvelles constantes arbitraires, et F_1 et F_2 désignant des fonctions quelconques. On peut, en effet, déduire les

(*) Nous exposons la même chose, à propos des équations à n variables indépendantes, en employant plus encore les déterminants. Le lecteur jugera laquelle de ces deux expositions est préférable.

équations (5) des équations (6) ou réciproquement. On peut aussi montrer directement que les différentielles dF_1, dF_2 sont identiquement nulles, quand on suppose l'existence des relations (3) et (4). On déduit, en effet, de $F_1 = A$, au moyen de (4) et (3),

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + \frac{\partial F_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}X + \frac{\partial u}{\partial y}Y + \frac{\partial u}{\partial z}Z\right) + \frac{\partial F_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}X + \frac{\partial v}{\partial y}Y + \frac{\partial v}{\partial z}Z\right) = 0;$$

c'est-à-dire,

$$0 = 0.$$

Réciproquement si $u = a$, $v = b$ sont des intégrales distinctes du système (4) où X, Y, Z sont des fonctions quelconques de x, y, z, c'est-à-dire si les relations (3) existent, toute équation

$$F(u, v) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

entre les fonctions u et v, est une solution de l'équation

$$Xp + Yq = Z.$$

On déduit, en effet, de l'équation (1) :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + p\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + q\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z; il viendra :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)(Xp + Yq - Z) = 0.$$

En vertu des équations (5), on déduit de là

$$Xp + Yq = Z,$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles (2) et les équations simultanées (4) se correspondent d'une manière remarquable. Deux solutions (6) de la forme (1) de l'équation (2) donnent immédiatement le système intégral des équations (4), et réciproquement le système intégral (5) des équations (4), conduit immédiatement à une intégrale (1) de l'équation de la forme (2). Nous allons voir que toute solution de l'équation (1) est d'ailleurs nécessairement de cette forme, ce qui ramènera complètement la solution des équations de la forme (2) à celle des équations de la forme (4), et réciproquement.

18. *Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes.* Soit

$$\psi(x, y, z) = 0$$

une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles :

$$Xp + Yq = Z.$$

On aura, d'après le n° 2,

$$X\frac{\partial \psi}{\partial x} + Y\frac{\partial \psi}{\partial y} + Z\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Si, d'ailleurs, $u = a$, $v = b$, sont des solutions du système :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

on vient de voir que

$$\left.\begin{aligned} X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Éliminant X, Y, Z entre ces trois relations, il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta\psi}{\delta x}, & \frac{\delta\psi}{\delta y}, & \frac{\delta\psi}{\delta z} \\ \frac{\delta u}{\delta x}, & \frac{\delta u}{\delta y}, & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x}, & \frac{\delta v}{\delta y}, & \frac{\delta v}{\delta z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\mathrm{D}\,\frac{\psi, u, v}{x, y, z} = 0.$$

D'après une propriété des déterminants fonctionnels (*), il résulte de là que ψ est une fonction de u et de v, de sorte que toute solution de l'équation donnée est de la forme (**)

$$\mathrm{F}(u, v) = 0;$$

d'après le numéro précédent, d'ailleurs, toute relation de cette forme est une solution.

19. *Détermination de la fonction arbitraire; interprétation géométrique.* A cause de la forme arbitraire de la fonction F, on peut imposer à la solution une condition telle que celle-ci : *pour* $x = x_0$, *il doit exister entre* y *et* z *une relation donnée,*

$$w(y, z) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Faisons $x = x_0$ dans les fonctions u et v; nous aurons, pour cette valeur x_0,

$$u = u_0(y, z) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$v = v_0(y, z) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

(*) Baltzer, *Déterminants*, § XIII, nº 3, p. 114.

(**) Lagrange n'a démontré cette réciproque que dans son mémoire de 1785. Dans ses autres écrits sur ce sujet, avant et après 1785, il l'admet tacitement sans la démontrer. La forme que nous donnons à la démonstration est empruntée à Boole.

Éliminons y et z entre ces trois relations, et soit

$$F(u, v) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

le résultat de l'élimination, *de telle sorte que l'on puisse inversement déduire* (8) *de* (9) (10) (11) *par élimination de* u *et* v. Il est clair que la relation (11) satisfait à l'équation donnée et à la condition donnée, car, si l'on y fait $x = x_0$, elle se réduit à (8).

On peut s'imposer des conditions autres que celle que nous venons d'indiquer; pour les énoncer plus facilement, interprétons géométriquement la solution donnée plus haut. L'équation :

$$Xp + Yq = Z \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

exprime une propriété du plan tangent à la *surface*, représentée par la relation

$$F(u, v) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cette surface est évidemment engendrée par les *courbes* dont les équations sont

$$u = a, \quad v = b, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

et qui sont assujetties à la condition exprimée par la relation :

$$F(a, b) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

On peut demander que cette surface passe par une courbe donnée parallèle au plan des yz :

$$x = x_0, \quad w(y, z) = 0.$$

comme nous l'avons fait plus haut, ou par une *courbe quelconque*, dont les équations sont

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0,$$

ou qu'elle soit tangente à une surface donnée, ou qu'elle satisfasse à telle autre condition géométrique que l'on voudra. Dans chaque cas particulier, du moment que l'on aura la condition analytique (12), on en déduira immédiatement l'équation de la surface. On voit, par là, que la détermination de la forme de F est une question de géométrie analytique à trois dimensions.

20. Exemples. I. *Équations des cylindres* (*). Les cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite

$$x = az + a', \quad y = bz + b',$$

ont pour équation finie :

$$x - az = \varphi(y - bz),$$

et, par suite, pour équation aux dérivées partielles :

$$ap + bq = 1.$$

Réciproquement ces équations n'appartiennent qu'aux cylindres. La chose est évidente pour la première. La seconde a la première pour intégrale, car le système d'équations simultanées correspondant

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

conduit immédiatement à l'équation suivante des génératrices qui sont des droites parallèles à une direction donnée :

$$x - az = a', \quad y - bz = b'.$$

L'équation aux dérivées partielles des cylindres exprime que le plan tangent est parallèle à la direction des génératrices.

II. *Équations des cônes*. Les cônes, dont le sommet est le point (a, b, c), ont pour équation finie :

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right),$$

et pour équation aux dérivées partielles :

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c.$$

Si le sommet est à l'origine, cette équation prend la forme plus simple,

$$z = px + qy.$$

(*) Nous donnons ces exemples élémentaires pour être complet.

On trouve, sans peine, que cette dernière équation, qui exprime que le plan tangent au cône passe par le sommet, appartient exclusivement aux surfaces coniques; autrement dit, que l'équation aux dérivées partielles a pour intégrale l'équation finie donnée plus haut.

III. *Équations des conoïdes.* Quand on prend la directrice rectiligne pour axe des z, et le plan directeur pour plan des xy, on trouve pour équation finie des conoïdes :

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et pour équation aux dérivées partielles :

$$px + qy = 0.$$

Celle-ci exprime que le plan tangent contient la génératrice qui passe par le point de contact. Lorsqu'on intègre cette équation, on retombe sur l'équation finie, ce qui prouve que l'équation aux dérivées partielles n'appartient qu'aux conoïdes.

IV. *Surfaces de révolution.* On peut regarder une surface de révolution comme le lieu d'un cercle mobile :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a,$$
$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = b,$$

dont le plan est perpendiculaire à la direction déterminée par les cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, quand on suppose que l'axe de révolution a cette direction et passe par l'origine des coordonnées. L'équation finie des surfaces de révolution est donc :

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

On tire de là, en dérivant par rapport à x et y, et écrivant en outre une équation identique, pour la symétrie :

$$\cos\alpha + p \cos\gamma = 2\varphi'.(x + pz),$$
$$\cos\beta + q \cos\gamma = 2\varphi'.(y + qz),$$
$$\cos\gamma - \quad \cos\gamma = 2\varphi'.(z \; - \; z).$$

D'où, immédiatement :

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x+pz, & y+qz, & z-z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en retranchant la première ligne, multipliée par z, de la seconde :

$$\begin{vmatrix} p, & q, & -1 \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution. On peut encore l'écrire :

$$p(y\cos\gamma - z\cos\beta) + q(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = x\cos\beta - y\cos\alpha.$$

On remonte aisément de cette équation à l'équation finie des surfaces de révolution. Pour cela, on doit intégrer le système auxiliaire :

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} y, & z \\ \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} z, & x \\ \cos\gamma, & \cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} x, & y \\ \cos\alpha, & \cos\beta \end{vmatrix}}.$$

Ces trois rapports sont égaux aux suivants, où les dénominateurs sont nuls et, par suite aussi, les numérateurs :

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}} = \frac{\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz}{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}}.$$

Les relations :

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz = 0,$$

donnent immédiatement les intégrales du système auxiliaire :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = b,$$

et, par suite, l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

L'équation aux dérivées partielles exprime que les normales, le long d'un parallèle de la surface, rencontrent l'axe de révolution en un même point (*).

V. *Trajectoires orthogonales* (**). Si

$$F(x, y, z, k) = 0$$

représente, en coordonnées rectangulaires, une série de surfaces correspondant aux diverses valeurs de k, l'équation

$$p \frac{\partial F}{\partial x} + q \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

sera la condition pour qu'une autre surface dont le plan tangent a pour coefficients de direction p, q, -1, lui soit normale. Si l'on élimine k entre les deux équations précédentes, l'équation résultante sera l'équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales de la surface donnée. Cette équation, comme on le voit, sera du premier ordre.

Comme exemple, considérons les ellipsoïdes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k.$$

L'équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales sera

$$p \frac{x}{a^2} + q \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2}.$$

(*) C'est MONGE, si nous ne nous trompons, qui a donné le premier les équations aux dérivées partielles des diverses sortes de surfaces. Voir ses *Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie, à l'usage de l'École polytechnique, publiées la première année de cette école (an III de la République)*, nos 4, 5 et 6 et tous les traités de calcul infinitésimal.

(**) LAGRANGE, Mémoires de Berlin, 1785, p. 189, no 16.

On trouve immédiatement pour intégrale :

$$\frac{x^{a^2}}{z^{c^2}} = \varphi\left(\frac{y^{b^2}}{z^{c^2}}\right).$$

21. *De quelques équations que l'on peut rendre linéaires* (*).
I. Soit, en premier lieu, l'équation :

$$xf_1(p,q,z-px-qy)+yf_2(p,q,z-px-qy)+f_3(p,q,z-px-qy)=0.$$

Posant :

$$u=z-px-qy,$$

on aura :

$$du=-xdp-ydq;$$

et, par suite, si l'on prend, p et q pour variables indépendantes :

$$\frac{du}{dp}=-x,\quad \frac{du}{dq}=-y.$$

Par conséquent, l'équation devient :

$$\frac{du}{dp}f_1(p,q,u)+\frac{du}{dq}f_2(p,q,u)=f_3(p,q,u).$$

Celle-ci étant linéaire, on pourra en trouver l'intégrale. On tirera de cette intégrale les valeurs des dérivées par rapport à p et à q; on les égalera à x et à y; puis, entre les équations ainsi obtenues, et $u=(z-px-qy)$, on éliminera u, p et q.

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1774, Œuvres, t. IV, nº 53, p. 83; Lacroix, t. II, p. 558, t. III, p. 708. Chasles, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, pp. 90-91, Paris, 1870, indique divers travaux sur les équations de ce genre, en en attribuant la découverte à Monge. Voir, en outre, une note de M. Orloff, Bulletins de Bruxelles, 2e série, t. XXXIII, pp. 113-122, puis Lie, Mathematische Annalen, t. V, p. 159, qui en donne une interprétation, au point de vue de la géométrie moderne. On appelle souvent *transformation de Legendre*, la transformation effectuée ici. [Plücker s'occupe de l'interprétation géométrique de la tranformation de Legendre, dans ses *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen, 1831), p. 265, et dans le Journal de Crelle, t. IX, pp. 124-134.]

Cette méthode se simplifie dans le cas de l'équation de Clairaut, déjà étudiée plus haut (n° 9)

$$z = px + qy + f(p, q),$$

qui conduit, non à une équation aux dérivées partielles, mais à l'équation

$$u = f(p, q).$$

On fera,

$$p = a, \quad q = b, \quad u = f(a, b),$$

ce qui donnera

$$du = 0, \quad dp = 0, \quad dq = 0.$$

Par conséquent, la relation $du = -xdp - ydq$ sera vérifiée. On trouvera d'ailleurs pour intégrale complète

$$z = ax + by + f(a, b).$$

II. Soit, en second lieu, l'équation :

$$xf_1(y, p, z - px) = qf_2(y, p, z - px) - f_3(y, p, z - px).$$

On posera :

$$u = z - px;$$

d'où

$$du = qdy - xdp,$$

$$\frac{du}{dy} = q, \quad \frac{du}{dp} = -x.$$

L'équation donnée deviendra :

$$\frac{du}{dp} f_1(y, p, u) + \frac{du}{dy} f_2(y, p, u) = f_3(y, p, u),$$

et l'intégration s'achèvera comme dans le cas précédent.

En particulier, si l'on a,

$$z - px = f(y, p)$$

on trouve, pour équation transformée :

$$u = f(y, p).$$

On fera

$$p = \varphi y,$$

et pour déterminer z, quel que soit φ, l'on aura la relation

$$z = x\varphi y + f(y, \varphi y),$$

comme on le savait d'avance, puisque y joue, dans l'équation donnée, le rôle d'une constante.

§ 6. *Équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables.*

22. *Génération de ces équations, d'après Lagrange.* Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n fonctions données des variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

une relation quelconque entre ces fonctions. Il existe entre z, $x_1, \ldots, x_n$ et les dérivées partielles

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \ldots, p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

de z par rapport à x et à y, une relation indépendante de la forme de l'équation (1) et linéaire en $p_1, \ldots, p_n$.

Pour le montrer, dérivons la relation (1) par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Il viendra :

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_1\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_1} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_1\right) = 0,$$
$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_2\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_2} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_2\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_n} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_n\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_n} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_n\right) = 0.$$

D'où, en éliminant les dérivées de F par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_1, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_1} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_1 \\ \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_2, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_2} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\delta u_1}{\delta x_n} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_n, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_n} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_n \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$Z = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en posant :

$$Z = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}, \quad X_1 = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{z_1, x_2, \ldots, x_n},$$

$$X_2 = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, z, x_3, \ldots, x_n}, \ldots, X_n = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, z}.$$

L'équation (2) peut facilement se mettre sous la forme d'un déterminant, contenant une colonne et une ligne de plus que le précédent :

$$\begin{vmatrix} +1, & \frac{\partial u_1}{\partial z}, & \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ -p_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_n, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Enfin, si l'on suppose la relation (1) mise sous la forme

$$\psi(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

de façon que

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}, \quad p_2 = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}, \ldots, p_n = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}},$$

les équations (2) et (2'), transformées d'après le n° 2, deviendront

$$Z\frac{\partial \psi}{\partial z} + X_1\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial u_1}{\partial z}, & \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

ou

$$D\frac{\psi, u_1, u_2, \ldots, u_n}{z, x_1, x_2, \ldots, x_n} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4'')$$

Cette relation s'obtient en éliminant dz, dx_1, dx_2, ..., dx_n, entre les équations $d\psi = 0$, $du_1 = 0$, ..., $du_n = 0$ (*).

23. [*Génération des équations linéaires d'après Lie.* D'après ce que l'on a vu plus haut (n° 15), on devra éliminer a_1, a_2, ..., a_n, λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1}, entre les équations

$$u_1 - a_1 = 0, \quad u_2 - a_2 = 0, \ldots, u_n - a_n = 0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} + p_1 \frac{\delta F}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta x_2} + p_2 \frac{\delta F}{\delta z} = 0, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_n} + p_n \frac{\delta F}{\delta z} = 0,$$

où

$$F = \lambda_1 (u_1 - a_1) + \lambda_2 (u_2 - a_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u_{n-1} - a_{n-1}) + u_n - a_n.$$

Les constantes a disparaissant d'elles-mêmes, on est donc ramené à éliminer les quantités λ entre les équations :

$$\lambda_1 \left(\frac{du_1}{dx_1} + p_1 \frac{du_1}{dz}\right) + \cdots + \left(\frac{du_n}{dx_1} + p_1 \frac{du_n}{dz}\right) = 0,$$

. . . .

$$\lambda_1 \left(\frac{du_1}{dx_n} + p_n \frac{du_1}{dz}\right) + \cdots + \left(\frac{du_n}{dx_n} + p_n \frac{du_n}{dz}\right) = 0,$$

ce qui conduit à la même équation que la méthode de Lagrange.]

24. *Système d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation* (2). D'après les propriétés des déterminants, si l'on remplace dans l'équation (4''), ψ par u_1, u_2, ... ou u_n, elle sera encore vérifiée, c'est-à-dire que l'on a :

$$Z \frac{\delta u_1}{\delta z} + X_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \cdots + X_n \frac{\delta u_1}{\delta x_n} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_1)$$

$$Z \frac{\delta u_2}{\delta z} + X_1 \frac{\delta u_2}{\delta x_1} + \cdots + X_n \frac{\delta u_2}{\delta x_n} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_2)$$

. . . .

$$Z \frac{\delta u_n}{\delta z} + X_1 \frac{\delta u_n}{\delta x_1} + \cdots + X_n \frac{\delta u_n}{\delta x_n} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_n)$$

(*) Boole, *Supplément*, p. 63, déduit l'équation (4') de cette remarque, au lieu de faire l'inverse, mais cela ne nous semble pas permis.

ces équations expriment, non-seulement que les équations

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

ont, chacune prise à part, une intégrale de l'équation (2), ce que nous savions déjà, puisque la forme de F est arbitraire, mais aussi que, prises ensemble, elles constituent le système intégral des équations simultanées :

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Si l'on multiplie (5_1) par $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$, (5_2) par $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$, ..., (5_n) par $\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$, ces multiplicateurs étant les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, et si l'on ajoute les résultats, il vient

$$Z \frac{d\varphi}{dz} + X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Il résulte de là que l'on peut encore prendre, pour système intégral des équations (7), n relations distinctes de la forme :

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_1, \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_n; \quad \ldots \quad (8)$$

et, en effet, on peut déduire de celles-ci les relations (5). De plus, ces équations (8) étant de la forme (1), satisfont à l'équation (2). On voit donc qu'il y a une correspondance exacte entre les équations (2) et (7), ce qui lie étroitement les solutions de celles-ci à la solution de celle-là et réciproquement.

On peut établir directement cette correspondance entre les équations (2) et (7) comme suit. Supposons que $Z, X_1, \ldots X_n$ soient des fonctions quelconques de $z, x_1, \ldots x_n$, et soient

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

les intégrales distinctes des équations

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Je dis que la relation

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

où F désigne une fonction quelconque, est une solution de l'équation

$$Z = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_n X_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On déduit, en effet, de (1) par dérivation, et en écrivant, en outre, une équation identique :

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \frac{\delta F}{\delta u_2}\frac{\delta u_2}{\delta x_1} + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\frac{\delta u_n}{\delta x_1} + p_1 \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta F}{\delta u_2}\frac{\delta u_2}{\delta x_2} + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\frac{\delta u_n}{\delta x_2} + p_2 \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\frac{\delta u_1}{\delta x_n} + \frac{\delta F}{\delta u_2}\frac{\delta u_2}{\delta x_n} + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\frac{\delta u_n}{\delta x_n} + p_n \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\frac{\delta u_1}{\delta z} + \frac{\delta F}{\delta u_2}\frac{\delta u_2}{\delta z} + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\frac{\delta u_n}{\delta z} - \frac{dF}{dz} = 0.$$

Multiplions ces équations par X_1, $X_2, \ldots, X_n$, Z et ajoutons les résultats. Il viendra :

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(X_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + X_2 \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \cdots + X_n \frac{\delta u_1}{\delta x_n} + Z \frac{\delta u_1}{\delta z}\right) +$$

$$\frac{\delta F}{\delta u_2}\left(X_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + X_2 \frac{\delta u_2}{\delta x_2} + \cdots + X_n \frac{\delta u_2}{\delta x_n} + Z \frac{\delta u_2}{\delta z}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta F}{\delta u_n}\left(X_1 \frac{\delta u_n}{\delta x_1} + X_2 \frac{\delta u_n}{\delta x_2} + \cdots + X_n \frac{\delta u_n}{\delta x_n} + Z \frac{\delta u_n}{\delta z}\right) +$$

$$\frac{dF}{dz}(p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_n X_n - Z) = 0.$$

Les relations (6) constituent des intégrales des équations (7), et, par suite, les relations (5) sont satisfaites. Les coefficients de

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}, \ \frac{\delta F}{\delta u_2}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta u_n},$$

dans l'équation précédente, sont donc nuls, et, par suite, l'on a, en général :

$$Z = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_n X_n.$$

25. *Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables.* Soit

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots \quad (6)$$

le système intégral des équations :

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}; \quad \ldots \quad (7)$$

de sorte que l'on a les n équations distinctes :

$$\left.\begin{array}{l} Z\dfrac{\delta u_1}{\delta z} + X_1\dfrac{\delta u_1}{\delta x_1} + \cdots + X_n\dfrac{\delta u_1}{\delta x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z\dfrac{\delta u_n}{dz} + X_1\dfrac{\delta u_n}{\delta x_1} + \cdots + X_n\dfrac{\delta u_n}{\delta x_n} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Je dis que toute solution de l'équation

$$Z = p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_nX_n \quad \ldots \quad (2)$$

sera de la forme

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0. \quad \ldots \quad (1)$$

Soit, en effet,

$$\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

cette solution. On aura, d'après le n° 2,

$$Z\frac{\delta\psi}{\delta z} + X_1\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \cdots + X_n\frac{\delta\psi}{\delta x_n} = 0. \quad \ldots \quad (9)$$

En éliminant $Z, X_1, \ldots, X_n$ entre les équations (5) et (9), il vient

$$D\frac{\psi, u_1, \ldots, u_n}{z, x_1, \ldots, x_n} = 0,$$

équation équivalente à (1), d'après les propriétés des déterminants fonctionnels.

26. *Détermination de la fonction arbitraire.* Supposons que l'on demande de déterminer la forme de la fonction F de manière que, pour $x_n = x_{n0}$, on ait, entre $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, une relation de la forme

$$F_0(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \quad \ldots \quad (10)$$

On fera $x_n = x_{n0}$ dans les valeurs des u et l'on aura ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_{10}(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_{n0}(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

le résultat de l'élimination de z, x_1, x_2, ..., x_{n-1} entre les équations (10) et (11), *de sorte que réciproquement l'élimination de* $u_1, \ldots, u_n$, *entre les équations* (11) *et* (12) *donne l'équation* (10). En faisant $x_n = x_{n0}$ dans (12), on trouvera, entre $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, cette relation (10).

On peut s'imposer des conditions autres que celle que nous venons d'indiquer, et il est facile de montrer comment on y satisfait, en interprétant les résultats précédents, au moyen du langage symbolique actuellement adopté et relatif à un espace à $(n+1)$ dimensions.

L'équation

$$Z = p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n$$

exprime une propriété de la *variété linéaire à* n *dimensions*, qui a un contact du premier ordre avec la *variété à* n *dimensions*,

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

Celle-ci est évidemment engendrée par les *variétés à une dimension*

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

soumises à la condition analytique :

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

Cette condition analytique peut résulter de conditions géométriques. Si la variété $F = 0$ doit passer, par exemple, par la variété à $(n-1)$ dimensions déterminée par les équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

aux points communs à la variété *génératrice* (13) et à la variété

directrice (14), les valeurs des $(n+1)$ coordonnées $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ devront être identiques. On trouvera donc la condition

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

en éliminant ces coordonnées entre les équations (13) et (14).

Supposons encore que la variété F doive avoir une variété linéaire à n dimensions, tangente commune avec une variété à n dimensions donnée :

$$F_1(z, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

Le long de la *variété de contact*, les valeurs des quantités p seront communes à F et F_1. On aura donc :

$$Z\frac{\partial F_1}{\partial z} + X_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + X_n\frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

Les équations (15) et (16) donnent la *variété de contact à* (n — 1) *dimensions*. On éliminera $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ entre les équations (13) (15) (16) et on trouvera encore la condition $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ (*).

27. Exemples. I. « Soit proposée l'équation entre quatre variables

$$(y+t+z)\frac{dz}{dx} + (x+t+z)\frac{dz}{dy} + (x+y+z)\frac{dz}{dt} = x+y+t.$$

On aura à intégrer ces trois équations particulières :

$$dy - \frac{x+t+z}{y+t+z}dx = 0,$$

$$dt - \frac{x+y+z}{y+t+z}dx = 0,$$

$$dz - \frac{x+y+t}{y+t+z}dx = 0,$$

(*) Les auteurs se sont bornés, jusqu'à présent, à la recherche de F dans le cas où l'on se donne la condition (10), ce qui est naturel, puisque l'idée d'une géométrie à $(n+1)$ dimensions est toute récente. Cependant Cauchy, vers la fin du mémoire que nous analysons plus bas (livre III, ch. I), s'impose des conditions un peu plus générales que (10). Les recherches de Lie, qui sont la continuation naturelle de celles de Cauchy, reposent essentiellement sur la géométrie à $(n+1)$ dimensions. [Comparez la note du n° 4, p. 6.]

et pour cet effet, j'en tire d'abord celles-ci :

$$dy - dx = \frac{x-y}{y+t+z}dx,$$

$$dt - dx = \frac{x-t}{y+t+z}dx,$$

$$dz - dx = \frac{x-z}{y+t+z}dx,$$

$$dx + dy + dt + dz = \frac{3(x+y+t+z)}{y+t+z}dx,$$

d'où éliminant $\frac{dx}{y+t+z}$, j'ai trois équations intégrables, et dont les intégrales seront

$$(y-x)^3(x+y+t+z) = \alpha,$$
$$(t-x)^3(x+y+t+z) = \beta,$$
$$(z-x)^3(x+y+t+z) = \gamma;$$

de là, on aura pour l'intégrale de la proposée $\alpha = \varphi(\beta, \gamma)$ » (Lagrange) (*).

Supposons que pour $x = 0$, on ait

$$t^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

On devra éliminer t, y, z entre cette équation et les suivantes :

$$y^3(y+t+z) = \alpha,$$
$$t^3(y+t+z) = \beta,$$
$$z^3(y+t+z) = \gamma.$$

On trouve d'abord, en ajoutant ces trois relations :

$$\alpha + \beta + \gamma = y + z + t,$$

puis,

$$y = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}}, \quad t = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

En substituant ces valeurs dans la dernière équation, on trouve l'équation de condition suivante :

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{4/3} = \alpha^{1/3} + \beta^{1/3} + \gamma^{1/3};$$

(*) Mémoires de Berlin, 1779, pp. 155-156.

d'où pour l'intégrale :

$$(y-x)^3+(z-x)^3+(t-x)^3=\left[\frac{(y-x)+(z-x)+(t-x)}{x+y+z+t}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

II. L'équation

$$mz=px+p_1x_1+\cdots+p_nx_n$$

conduit au système auxiliaire

$$\frac{dz}{mz}=\frac{dx}{x}=\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n},$$

dont les intégrales sont :

$$\frac{z}{x^m}=a,\ \frac{x_1}{x}=a_1,\ldots,\frac{x_n}{x}=a_n.$$

L'intégrale de l'équation donnée est donc :

$$z=x^m\varphi\left(\frac{x_1}{x},\ \frac{x_2}{x},\ldots,\frac{x_n}{x}\right),$$

ce qui prouve que *les fonctions homogènes jouissent seules de la propriété exprimée par l'équation aux dérivées partielles*

$$mz=px+p_1x_1+\cdots+p_nx_n\ (^*).$$

III. Soit à intégrer l'équation (**)

$$(X_1-x_1X_n)\,p_1+(X_2-x_2X_n)\,p_2+\cdots+(X_{n-1}-x_{n-1}X_n)\,p_{n-1}=1,$$

(*) Lacroix, t. II, n° 736, p. 543.

(**) C'est à peu près l'équation étudiée par Hesse dans le mémoire intitulé : *De integratione aequationis differentialis partialis*

$$A_1-A_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2}-A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}-\cdots-A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}$$
$$+A_n\left\{x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}+\cdots+x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}-x_1\right\}=0$$

designantibus A_1, A_2, ..., A_n *functiones quaslibet variabilium* x_1; x_2, ..., x_{n-1} *lineares* (Journal de Crelle, t. XXV, pp. 171-177). Hesse cite un travail antérieur sur l'équation différentielle correspondant à $n=3$, dû à Jacobi et auquel il a emprunté sa méthode d'intégration. Voir aussi Serret, *Calcul intégral*, pp. 425-433, [et Fouret, C. R., t. LXXVIII, pp. 831, 1693, 1837.]

où les fonctions X sont définies par l'équation :

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}.$$

Les équations auxiliaires seront :

$$\frac{dz}{1} = \frac{dx_1}{X_1 - x_1X_n} = \frac{dx_2}{X_2 - x_2X_n} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1} - x_{n-1}X_n},$$

ou encore :

$$\frac{dx_1}{dz} = X_1 - x_1X_n,$$

$$\frac{dx_2}{dz} = X_2 - x_2X_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dz} = X_{n-1} - x_{n-1}X_n.$$

Posons, avec Hesse,

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n},\ x_2 = \frac{y_2}{y_n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n},$$

y_n étant une fonction encore indéterminée. On aura :

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{1}{y_n}\frac{dy_1}{dz} - \frac{y_1}{y_n^2}\frac{dy_n}{dz}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dz} = \frac{1}{y_n}\frac{dy_{n-1}}{dz} - \frac{y_{n-1}}{y_n^2}\frac{dy_n}{dz},$$

et, par suite, le système auxiliaire sera, après multiplication par y_n,

$$\frac{dy_1}{dz} - X_1y_1 = \frac{y_1}{y_n}\left(\frac{dy_n}{dz} - X_ny_n\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dz} - X_{n-1}y_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n}\left(\frac{dy_n}{dz} - X_ny_n\right).$$

Déterminons y_n par la condition

$$\frac{dy_n}{dz} = X_ny_n,$$

et posons en général :

$$Y = X_ny_n = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n.$$

Le système auxiliaire deviendra :

$$\frac{dy_1}{dz} = Y_1,\quad \frac{dy_2}{dz} = Y_2, \ldots, \frac{dy_n}{dz} = Y_n.$$

On intègre facilement ces équations par la méthode des produits symboliques de Brisson et Cauchy (*). Si D indique une dérivation par rapport à z, chacune des équations précédentes pourra s'écrire :

$$a_{i1} y_1 + \cdots + (a_{ii} - \mathrm{D})\, y_i + \cdots + a_{in} y_n = 0.$$

L'élimination de toutes les fonctions à déterminer, sauf une quelconque, conduit, comme l'on sait, à une seule équation linéaire d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mathrm{D}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \mathrm{D}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \mathrm{D}, & \ldots, & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots, & a_{nn} - \mathrm{D} \end{vmatrix} y = 0.$$

On déduit de là, pour les fonctions y, des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 z_{11} + c_2 z_{12} + \cdots + c_n z_{1n}, \\ y_2 &= c_1 z_{21} + c_2 z_{22} + \cdots + c_n z_{2n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= c_1 z_{n1} + c_2 z_{n2} + \cdots + c_n z_{nn}, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes, $z_{11}, \ldots, z_{nn}$, des fonctions de z, qui, dans le cas général, ne diffèrent que par des facteurs constants, pour deux fonctions y.

On tire des valeurs précédentes

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n} = \frac{\Sigma c_i z_{1i}}{\Sigma c_i z_{ni}}, \ldots, x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\Sigma c_i z_{n-1,i}}{\Sigma c_i z_{ni}}.$$

(*) Cauchy, Exercices de mathématiques, t. II, pp. 159 et suiv.: *Sur l'analogie des puissances et des différences*. [Voir aussi notre petit Mémoire : *Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations aux différences finies ou infiniment petites*. Mém. couronnés et autres mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, t. XXII.]

On aura l'intégrale de l'équation donnée, en éliminant les $(n-1)$ constantes

$$\frac{c_1}{c_n}, \frac{c_2}{c_n}, \cdots, \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

entre ces équations et la relation quelconque

$$\mathrm{F}\left(\frac{c_1}{c_n}, \frac{c_2}{c_n}, \cdots, \frac{c_{n-1}}{c_n}\right)=0.$$

[Au point de vue de Lie, les équations qui donnent les valeurs des $(n-1)$ quantités x, constituent l'intégrale complète de l'équation donnée.]

28. *De quelques équations que l'on peut rendre linéaires* (*).
I. Soit l'équation

$$x_1 f_1 = p_2 f_2 + p_3 f_3 + \cdots + p_n f_n - f,$$

chacune des fonctions f étant de la forme

$$f(z - p_1 x_1, p_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Nous poserons, comme au n° 21 :

$$u = z - p_1 x_1.$$

On déduira de là :

$$du = -x_1 dp_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n,$$

et, en prenant pour nouvelles variables $p_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{du}{dp_1} = -x_1, \frac{du}{dx_2} = p_2, \ldots, \frac{du}{dx_n} = p_n.$$

L'équation donnée deviendra

$$f_1 \frac{du}{dp_1} + f_2 \frac{du}{dx_2} + \cdots + f_n \frac{du}{dx_n} = f,$$

d'où l'on tirera aisément l'intégrale de l'équation donnée (voir n° 21).

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1779, t. IV, n°s 8 et 9, p. 632. L'équation donnée et la transformée ont été appelées *réciproques*. Voir la note du n° 21.

II. Soit l'équation :

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = p_3 f_3 + \cdots + p_n f_n - f,$$

chacune des fonctions f étant de la forme :

$$f(u, p_1, p_2, x_3, \ldots, x_n),$$

et u étant donné par la relation :

$$u = z - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

On aura :

$$du = -x_1 dp_1 - x_2 dp_2 + p_3 dx_3 + \cdots + p_n dx_n,$$

$$\frac{du}{dp_1} = -x_1, \quad \frac{du}{dp_2} = -x_2, \quad \frac{du}{dx_3} = p_3, \ldots, \frac{du}{dx_n} = p_n.$$

L'équation donnée deviendra encore linéaire :

$$f_1 \frac{du}{dp_1} + f_2 \frac{du}{dp_2} + f_3 \frac{du}{dx_3} + \cdots + f_n \frac{du}{dx_n} = f.$$

III. Et ainsi de suite. On doit, en particulier, noter l'équation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n + f = 0,$$

chacune des fonctions f étant de la forme :

$$f(z - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

En posant :

$$u = z - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n,$$

on trouvera :

$$du = -x_1 dp_1 - x_2 dp_2 - \cdots - x_n dp_n,$$

$$\frac{du}{dp_1} = -x_1, \quad \frac{du}{dp_2} = -x_2, \ldots, \frac{du}{dp_n} = -x_n,$$

et l'équation transformée sera :

$$f_1 \frac{du}{dp_1} + f_2 \frac{du}{dp_2} + \cdots + f_n \frac{du}{dp_n} = f.$$

Ainsi, l'équation déjà étudiée plus haut (n° 11)

$$z = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

devient de cette manière

$$u = f(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

En posant

$$p_1 = a_1, p_2 = a_2, \ldots, p_n = a_n,$$
$$u = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

on a :

$$du = 0, dp_1 = 0, \ldots, dp_n = 0,$$

et par suite

$$du = -x_1 dp_1 - \cdots - x_n dp_n.$$

On trouve ainsi l'intégrale complète

$$z = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

§ 7. *Intégration d'un système remarquable d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (*).

29. *Génération du système de ces équations.* Soit $(N+1) = (m+n)$, et considérons N fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$ de $(m+n)$ variables,

$$z_1, \ldots, z_m, x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

liées entre elles par m équations :

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_N) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F_m(u_1, u_2, \ldots, u_N) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1_N)$$

Nous allons montrer qu'il existe entre les dérivées des variables z, par rapport aux variables x, des relations remarquables indépendantes de la forme des fonctions F.

Considérons, pour cela, le déterminant fonctionnel

$$R = D \frac{F(u_1, \ldots, u_N), u_1, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) Jacobi (Journal de Crelle, t. II, pp. 321-323). On ne comprend pas pourquoi les traités de calcul intégral, publiés depuis l'époque (1827) où il a donné cette extension des recherches de Lagrange, ne font aucune mention de ce complément *indispensable* de toute théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. Nous abrégeons l'exposition de Jacobi, sans la modifier, par l'emploi des déterminants fonctionnels.

ù entre l'une quelconque des fonctions F. Comme la fonction F épend des fonctions u, ce déterminant sera nul. Donc

$$Z_1 \frac{dF}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF}{dz_m} + X_1 \frac{dF}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF}{dx_n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

n appelant $Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_n$, les déterminants mineurs de ., de sorte que

$$Z_i = (-1)^{i-1} D \frac{u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n},$$

$$X_i = (-1)^{m+i-1} D \frac{u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}.$$

'équation (3) est équivalente aux m équations :

$$Z_1 \frac{dF_1}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF_1}{dz_m} + X_1 \frac{dF_1}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF_1}{dx_n} = 0, \quad . \quad . \quad (3_1)$$

. . . .

$$Z_1 \frac{dF_m}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF_m}{dz_m} + X_1 \frac{dF_m}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF_m}{dx_n} = 0. \quad . \quad . \quad (3_m)$$

onsidérons maintenant le déterminant fonctionnel

$$\Delta = D \frac{F_1, \ldots, F_m}{z_1, \ldots, z_m} = A_{11} \frac{dF_1}{dz_1} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_1} + \cdots = A_{12} \frac{dF_1}{dz_2} + A_{22} \frac{dF_2}{dz_2} + \cdots,$$

ù les A_{ik} désignent des mineurs dont la valeur est donnée par la ormule

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D \frac{F_1, \ldots, F_{i-1}, F_{i+1}, \ldots, F_m}{z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z}.$$

n aura donc

$$A_{11} \frac{dF_1}{dz_2} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_2} + \cdots = 0,$$

$$A_{11} \frac{dF_1}{dz_3} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_3} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

Multiplions les équations (3) respectivement par $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1}$, uis par $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{m2}$, etc., et ajoutons, il viendra :

$$Z_1 \Delta + \sum_1^n X_i \left(A_{11} \frac{dF_1}{dx_i} + \cdots + A_{m1} \frac{dF_m}{dx_i} \right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_1)$$

. . . .

$$Z_m \Delta + \sum_1^n X_i \left(A_{m1} \frac{dF_1}{dx_i} + \cdots + A_{mm} \frac{dF_m}{dx_i} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_m)$$

Il est facile de simplifier ces relations. On a, pour chaque variable x,

$$\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}+\cdots+\frac{dF_1}{dz_m}\frac{dz_m}{dx}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dF_m}{dx}+\frac{dF_m}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}+\cdots+\frac{dF_m}{dz_m}\frac{dz_m}{dx}=0.$$

Multiplions ces relations par

$$A_{i1},\ A_{i2},\ldots,A_{im},$$

et ajoutons, elles donneront

$$A_{i1}\frac{dF_1}{dx}+\cdots+A_{im}\frac{dF_m}{dx}+\Delta\frac{dz_i}{dx}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

A cause de cette équation (5), les équations (4) prennent la forme très-simple découverte par Jacobi :

$$Z_1=X_1\frac{dz_1}{dx_1}+X_2\frac{dz_1}{dx_2}+\cdots+X_n\frac{dz_1}{dx_n}, \quad \ldots\ldots \quad (6_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_m=X_1\frac{dz_m}{dx_1}+X_2\frac{dz_m}{dx_2}+\cdots+X_n\frac{dz_m}{dx_n} \quad \ldots\ldots \quad (6_m)$$

30. [*Démonstration directe des formules* (6). Voici une démonstration directe des m formules (6), qui n'a pas été remarquée encore, croyons-nous. Le déterminant fonctionnel

$$S_i=D\,\frac{z_i,u_1,\ldots,u_N}{z_1,z_m,x_1,\ldots,x_n}$$

est nul, parce que les $(m+n)$ fonctions $u_1,\ldots,u_N$ et z_i, des variables $z_1,\ldots,z_m$, $x_1,\ldots,x_n$ ne sont pas indépendantes, puisqu'il existe entre elles m relations (1). L'équation, qui exprime cette dépendance, savoir

$$S_i=0,$$

est précisément l'équation (6_i).]

Si l'on remplace les A, par leur valeur, dans chacune des équations (4), on arrive à une formule remarquable de la théorie des déterminants fonctionnels. Elle exprime la même chose que l'équation $S_i=0$, mais les relations entre les z et les u, suppo-

sées explicites dans cette dernière, sont supposées sous forme implicite dans la formule dont nous parlons. Nous croyons inutile de l'écrire.

31. *Intégration du système* (6). Si dans le système (6), $Z_1, \ldots, Z_m$, $X_1, \ldots, X_n$, sont des fonctions quelconques, pour intégrer ce système, on cherchera d'abord les N intégrales

$$u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots, u_N = a_N,$$

des équations

$$\frac{dz_1}{Z_1} = \cdots = \frac{dz_m}{Z_m} = \frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Toute fonction F des quantités u satisfera aux équations (3) et par suite égalée à 0, aux équations (6). On pourra donc prendre pour système intégral des équations (6), m relations de la forme $F = 0$.

Réciproquement toute équation

$$\psi(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

qui satisfait avec $(m-1)$ autres, au système donné (6), est de la forme (1).

En effet, on aura :

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \frac{\delta\psi}{\delta z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\delta\psi}{\delta z_m}\frac{dz_m}{dx_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_n} + \frac{\delta\psi}{\delta z_1}\frac{dz_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta\psi}{\delta z_m}\frac{dz_m}{dx_n} = 0.$$

Multiplions ces équations par $X_1, X_2, \ldots, X_m$, et ajoutons les produits. Il viendra, en tenant compte des équations (6) :

$$Z_1\frac{\delta\psi}{\delta z_1} + Z_2\frac{\delta\psi}{\delta z_2} + \cdots + Z_m\frac{\delta\psi}{\delta z_m} + X_1\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + X_2\frac{\delta\psi}{\delta x_2} + \cdots + X_m\frac{\delta\psi}{\delta x_m} = 0.$$

Cette équation donne, avec les équations (3), où l'on fait

$$F = u_1, u_2, \ldots, u_N,$$

$$D\frac{\psi, u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n} = 0,$$

ou

$$\psi = F(u_1, u_2, \ldots, u_N),$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) Cette réciproque n'est pas donnée par Jacobi.

32. *Conclusion générale.* Il résulte, des théorèmes démontrés dans ce chapitre, que la solution d'un système :

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots = \frac{dy_k}{Y_k}, \qquad \text{(A)}$$

au moyen de $(k-1)$ relations :

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2,$$

$Y_1, Y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots$, entraîne celle des systèmes d'équations suivants :

$$\left.\begin{array}{ll}
1 \ldots\ldots & Y_1 = Y_2 \dfrac{dy_1}{dy_2} + Y_3 \dfrac{dy_1}{dy_3} + \text{etc.}; \\[2ex]
2 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_3 \dfrac{dy_1}{dy_3} + Y_4 \dfrac{dy_1}{dy_4} + \text{etc.}, \\ Y_2 = Y_3 \dfrac{dy_2}{dy_3} + Y_4 \dfrac{dy_2}{dy_4} + \text{etc.}; \end{array}\right. \\[2ex]
3 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_4 \dfrac{dy_1}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_1}{dy_5} + \text{etc.}, \\ Y_2 = Y_4 \dfrac{dy_2}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_2}{dy_5} + \text{etc.}, \\ Y_3 = Y_4 \dfrac{dy_3}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_3}{dy_5} + \text{etc.}; \end{array}\right. \\[2ex]
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
(k-2) \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_{k-1} \dfrac{dy_1}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_1}{dy_k}, \\ Y_2 = Y_{k-1} \dfrac{dy_2}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_2}{dy_k}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ Y_{k-2} = Y_{k-1} \dfrac{dy_{k-2}}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_{k-2}}{dy_k}; \end{array}\right. \\[2ex]
(k-1) \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_k \dfrac{dy_1}{dy_k}, \\ Y_2 = Y_k \dfrac{dy_2}{dy_k}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ Y_{k-1} = Y_k \dfrac{dy_{k-1}}{dy_k}; \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

dont le premier est réduit à une équation, et dont le dernier est le système (A) lui-même. La solution d'un quelconque des systèmes (B) se compose d'autant de relations distinctes, de la forme

$$F(u_1, \ldots, u_k) = 0,$$

qu'il y a d'équations dans le système.

CHAPITRE II.

MÉTHODE DE LAGRANGE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A TROIS VARIABLES ET DE QUELQUES ÉQUATIONS CONTENANT UN PLUS GRAND NOMBRE DE VARIABLES (*).

---

§ 8. *Idée générale de la méthode de Lagrange.*

33. *Idée générale de la méthode de Lagrange.* Soit

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varkappa(x, y, z, p); \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

(*) Lagrange (Mémoires de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, pp. 549-577) a ramené l'intégration des équations quelconques du premier ordre à trois variables, à celles des équations linéaires aux dérivées partielles à quatre variables et aussi du premier ordre. Il a réduit, comme on l'a vu dans le chapitre Ier, l'intégration de celles-ci à celle des équations différentielles ordinaires, en 1779; cependant en 1785, il ne voyait pas encore clairement qu'il résulte de là que l'intégration des équations aux dérivées partielles quelconques à trois variables est ramenée à celle des équations différentielles ordinaires, car dans son Mémoire de cette année, p. 188, il déclare ne pouvoir achever l'intégration d'une équation non linéaire. C'est Charpit qui a montré, le premier, en 1784, dans un mémoire qui n'a jamais été publié, la connexion de ces trois questions : intégration des équations différentielles ordinaires, intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, et intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles. Nous empruntons ces remarques à Lacroix, t. II, n° 740, p. 548, et Jacobi (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 5).

l'équation donnée. Remplaçons q par sa valeur dans

$$dz = pdx + qdy; \quad \ldots \quad (2)$$

il viendra

$$dz = pdx + \varkappa(x, y, z, p)\,dy. \quad \ldots \quad (3)$$

La méthode de Lagrange, *sous sa première forme,* consiste à chercher, en général par tâtonnement, une valeur de p contenant une constante arbitraire a et rendant l'équation différentielle totale (3) intégrable; puis à en déduire z avec une seconde constante arbitraire b.

Autrement dit encore, et sous une forme plus générale, on doit chercher une relation autre que (1) entre x, y, z, p, q, contenant une constante arbitraire, et telle que les valeurs de p et q qu'on déduit de cette relation et de (1), rendent l'équation (2) intégrable (*).

La méthode s'étend sans peine à un nombre quelconque de variables. Soit

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \text{ou} \quad p_n = \pi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}), \quad (1')$$

l'équation donnée. Remplaçons p_n par sa valeur dans

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n; \quad \ldots \quad (2')$$

il viendra

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + \pi dx_n. \quad \ldots \quad (3')$$

Il faudra trouver pour $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ des valeurs contenant chacune une constante arbitraire et rendant (3') intégrable. Plus généralement, il faut trouver $(n - 1)$ relations contenant chacune $(n - 1)$ constantes arbitraires et donnant, avec (1'), pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$, des valeurs qui permettent d'intégrer l'équation (2').

Telle est la méthode de Lagrange, sous sa forme la plus générale. Nous allons montrer, sur quelques exemples, que l'on peut déjà, au moyen des indications qui précèdent, intégrer des équations assez compliquées.

(*) Lagrange, dans son premier mémoire, a indiqué la méthode générale pour trouver cette seconde relation, mais sans pouvoir la faire aboutir en général, puisqu'il ne possédait pas alors l'intégration des équations linéaires.

34. *Exemples.* I. Soit à intégrer les équations (*) :

$$1^\circ \quad q = \varkappa p,$$

$$2^\circ \quad q = \varkappa(p, y).$$

On aura

$$dz = pdx + \varkappa pdy, \quad dz = pdx + \varkappa(p, y)\,dy,$$

équations immédiatement intégrables si on fait $p = a$. On trouve les intégrales complètes :

$$z = ax + b + \varkappa ay,$$

$$z = ax + b + \int \varkappa(a, y)\,dy.$$

En appliquant ce procédé d'intégration aux équations :

$$pq = 1,$$

$$p^2 + q^2 + 1 = m^2,$$

$$p = qy + q^2,$$

on trouve les intégrales complètes :

$$z = ax + b + \frac{y}{a},$$

$$z = ax + b + \frac{y}{\sqrt{m^2 - 1 - a^2}},$$

$$z = ax + b - \frac{y^2}{4} \pm \left(\frac{y\sqrt{y^2 + 4a}}{4} + 2a\,\mathrm{l}\left(y + \sqrt{y^2 + 4a}\right)\right).$$

La seconde de ces équations répond au problème suivant : « *Trouver les surfaces dont l'aire, pour une portion quelconque, est à sa projection sur le plan des* xy, *dans le rapport* m : 1 ; ou encore : *Trouver les surfaces dont les normales soient parallèles aux génératrices d'un cône droit* (Comp. n° 15).

II. Soit à intégrer : 1° L'équation (**)

$$f_1(x, p) = f_2(y, q).$$

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 1er, 2me et 3me cas ; Œuvres, t. III, pp. 558-560.

(**) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 4me cas, Œuvres, t. III, p. 561 ; Mémoires de Berlin, 1774, n° 50, Œuvres, t. IV, p. 80.

On posera

$$f_1(x, p) = a, \quad f_2(y, q) = a.$$

On en déduira :

$$p = \varphi_1(x, a), \quad q = \varphi_2(y, a);$$

d'où

$$dz = \varphi_1(x, a)\, dx + \varphi_2(y, a)\, dy,$$
$$z = \int \varphi_1(x, a)\, dx + \int \varphi_2(y, a)\, dy + b.$$

2° Soit de même à intégrer (*)

$$\mathrm{F}(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0,$$

où

$$f_i = f_i(x_i, p_i \varphi z).$$

Il suffira de poser

$$f_i = a_i,$$
$$\mathrm{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

pour pouvoir déterminer, $p_1\varphi$ en fonction de x_1, $p_2\varphi$ en fonction de x_2, ... , de manière que

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

deviendra intégrable après multiplication par φ.

On peut rattacher à ces deux exemples la méthode dite *par séparation des variables ;* on la trouvera plus bas (§ 19, n° 72).

III. Soit encore à intégrer l'équation (**)

$$q = pf(x, y) + \mathrm{F}(x, y, z),$$

On aura

$$dz = p[dx + f(x, y)\, dy] + \mathrm{F} dy.$$

Intégrons

$$dx + f dy,$$

au moyen d'un facteur intégrant v, de manière que

$$v(dx + f dy) = du,$$

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, n°s 13-14; Œuvres, t. III, p. 574.

(**) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 8me cas, t. III, p. 567; idem, 1774, t. IV, n° 52, p. 82.

on éliminera x de F, en y introduisant u, puis on intégrera

$$dz - Fdy = 0$$

u moyen d'un facteur intégrant V, de telle sorte que, dans cette ypothèse,

$$V(dz - Fdy) = dU,$$

u encore, en supposant u variable, que

$$V(dz - Fdy) + \frac{dU}{du}du = dU.$$

En introduisant du et dU dans la valeur de dz, il vient enfin

$$dU = V(dz - Fdy) + \frac{dU}{du}du = \frac{Vpdu}{v} + \frac{dU}{du}du.$$

Posons

$$\frac{Vp}{v} + \frac{dU}{du} = a,$$

et nous aurons, pour intégrale :

$$U - au - b = 0.$$

Ainsi, par exemple, si

$$q = p\frac{y}{x} + (x^2 + y^2 + z),$$

$$u = x^2 + y^2,\quad v = 2x,\quad U = l(z + u) - y,\quad V = (z + u)^{-1},$$

et l'intégrale est

$$-y + l(z + x^2 + y^2) - a(x^2 + y^2) - b = 0.$$

IV. Soit enfin l'équation (*)

$$q = p^m \times f_1x \times f_2y \times f_3z.$$

Nous poserons

$$p = F_1x \,.\, F_2z,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions encore indéterminées. On aura

$$dz = F_1x \,.\, F_2z \,.\, dx + (F_1x)^m \,.\, f_1x \times f_2y \times (F_2z)^m \,.\, f_3zdy.$$

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 9me cas, t. III, p. 569.

Si l'on détermine F_1 et F_2 par les relations

$$(F_2 z)^{m-1} f_3 z = 1,$$
$$(F_1 x)^m f_1 x = a^m,$$

il vient :

$$\frac{dz}{F_2 z} = \frac{a dx}{\sqrt[m]{f_1 x}} + a^m f_2 y dy,$$

qui est immédiatement intégrable.

On trouve la même solution, par la méthode dite de séparation des variables (voir plus bas, § 19, n° 72).

§ 9. *Méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à trois variables* (*).

35. *Cas où l'équation ne contient pas la variable dépendante.* Soit

$$f(x, y, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varkappa(x, y, p) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

l'équation donnée. On sait que

$$dz = p dx + q dy. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Si l'on connaissait les valeurs de p et de q en x et y, on devrait avoir

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

et l'équation (1) pour ces valeurs deviendrait une identité. On a donc :

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\delta \varkappa}{\delta x} + \frac{\delta \varkappa}{\delta p} \frac{dp}{dx}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta p} \frac{dp}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{dq}{dx} = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4')$$

Éliminons $\frac{dq}{dx}$ de la relation (4) ou de la relation (4'), au moyen

(*) Outre les écrits cités au commencement du § 7, voir Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* leçon 22, pp. 168-175.

de (3); nous trouverons que p doit satisfaire à l'une des équations linéaires équivalentes :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dp}{dy} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5')$$

Réciproquement, si l'on connait une solution des équations (5) ou (5′), la valeur de p donnée par cette solution, et la valeur correspondante de q donnée par (1), rendent dz intégrable, ou satisfont à l'équation (3). En effet, des équations (1), (5) ou (1), (5′) on déduit l'équation (3).

Ainsi, on trouvera toutes les solutions de l'équation (1), en cherchant toutes les valeurs de p, qui satisfont à l'équation (5) ou à l'équation (5′), puis au moyen de (1), toutes les valeurs correspondantes de q, et intégrant l'équation (2). En général, il vaudra mieux se contenter de chercher une valeur de p contenant une constante arbitraire a, et satisfaisant à (5′), puis la valeur correspondante de q, et enfin intégrer (3); on arrivera ainsi à une solution de l'équation (1) qui contiendra deux constantes arbitraires, et qui sera une intégrale complète.

L'intégrale de l'équation (1) peut être trouvée, par des calculs plus symétriques, si l'on cherche une seconde relation

$$f_1(x, y, p, q) = 0,$$

entre x, y, p, q, qui serve à déterminer p et q avec (1) de la manière suivante. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dy} = 0;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{dp}{dy} + \frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{dq}{dy} = 0.$$

Éliminant, au moyen de la théorie des déterminants,

$$\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dq}{dx}, \quad \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dq}{dy},$$

entre ces équations et l'équation (3), il viendra :

$$\mathrm{D}\frac{f, f_1}{x, p} + \mathrm{D}\frac{f, f_1}{y, q} = 0,$$

ou

$$\frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta f_1}{\delta p} - \frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta f_1}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta f_1}{\delta q} - \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f_1}{\delta y} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

36. *Cas général.* Soit maintenant l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varkappa(x, y, z, p). \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

On sait que

$$dz = pdx + qdy. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si l'on connaissait une seconde relation

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

entre x, y, z, p, q, on pourrait déduire, de cette équation et de l'équation donnée, les valeurs de p et de q, et en substituant ces valeurs dans l'équation (2), celle-ci deviendrait immédiatement intégrable. On devra donc avoir

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ou

$$\frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta p}{\delta z} q = \frac{\delta q}{\delta x} + \frac{\delta q}{\delta z} p. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

pour toute relation (8) correspondant à une solution de (7).

Supposons que l'on substitue dans l'équation (7) les valeurs de p et de q en x, y, z, déduites de cette équation (7) et de l'équation (8); l'équation (7) deviendra une identité, et par suite on aura :

$$\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{\delta \varkappa}{\delta x} + \frac{\delta \varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta x}, \quad \frac{\delta q}{\delta z} = \frac{\delta \varkappa}{\delta z} + \frac{\delta \varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

ou

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta q}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta q}{\delta z} = 0. \ldots \quad (10')$$

Au moyen des équations (10), ou (10′) et (7), on pourra éliminer $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$ de l'équation (9′), qui deviendra ainsi :

$$\frac{\delta p}{\delta x}\frac{\delta \varkappa}{\delta p} - \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta p}{\delta z}\left(p\frac{\delta \varkappa}{\delta p} - \varkappa\right) + \frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z} = 0, \ldots \quad (11)$$

ou $$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0. \quad (11')$$

Réciproquement, des équations (7) (11) ou (7) (11′), on peut déduire l'équation (9′). L'intégration de l'équation (7) est donc ramenée à celle de l'équation (11), ou de l'équation (11′) d'où l'on suppose q éliminé.

On peut aussi ramener l'intégration de (7) à la recherche d'une relation implicite (8). Pour cela, on tirera de (7) et (8),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Les deux premières de ces équations donnent :

$$\mathrm{D}\frac{f, f_1}{x, p}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{q, p}\frac{\partial q}{\partial x}=0;$$

les secondes :

$$\mathrm{D}\frac{f, f_1}{y, q}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{p, q}\frac{\partial p}{\partial y}=0;$$

les troisièmes :

$$\mathrm{D}\frac{f, f_1}{z, p}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{q, p}\frac{\partial q}{\partial z}=0, \quad \mathrm{D}\frac{f, f_1}{z, q}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{p, q}\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Combinant ces relations avec (9′) il vient :

$$\mathrm{D}\frac{f, f_1}{x, p}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{y, q}+p\,\mathrm{D}\frac{f, f_1}{z, p}+q\,\mathrm{D}\frac{f, f_1}{z, q}=0;$$

ou, en changeant les signes, et ordonnant suivant les dérivées de f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)-\frac{\partial f_1}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial f_1}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0. \quad (13)$$

On arrive au même résultat, par la théorie des déterminants, en éliminant les dérivées de p et q entre (9′) et (12). On peut aussi remonter des équations (7) et (13) à l'équation (9′).

37. *Déduction de l'intégrale générale, de l'équation (11), (11') ou (13).* Les systèmes d'équations différentielles simultanées correspondant à ces équations, d'après le n° 32, sont :

$$-\frac{dx}{\frac{\delta \varkappa}{\delta p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{\varkappa - p\frac{\delta \varkappa}{\delta p}} = \frac{dp}{\frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z}}, \quad \ldots\ldots \quad (11_a)$$

$$\frac{dx}{\frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{dy}{\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{dz}{p\frac{\delta f}{\delta p} + q\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{-dp}{\frac{\delta f}{\delta x} + p\frac{\delta f}{\delta z}}, \quad \ldots\ldots \quad (11'_a)$$

$$\frac{dx}{\frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{dy}{\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{dz}{p\frac{\delta f}{\delta p} + q\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{-dp}{\frac{\delta f}{\delta x} + p\frac{\delta f}{\delta z}} = \frac{-dq}{\frac{\delta f}{\delta y} + q\frac{\delta f}{\delta z}}. \quad (13_a)$$

Considérons l'un quelconque de ces systèmes ; on tire immédiatement des deux premières équations

$$dz = pdx + qdy, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

relation qui peut donc remplacer l'une d'elles. Lagrange a ingénieusement déduit de là la solution d'un paradoxe analytique qu'il avait découvert lui-même.

Le système (11_a) a pour solution un système

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

où u, v, w sont des fonctions de x, y, z, p, et a, b, c des constantes. Par conséquent, l'intégrale de l'équation (11) ou (11') est une relation de la forme

$$u = \varphi(v, w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

φ étant arbitraire.

« Cette équation (15), dit Lagrange, combinée avec l'équation donnée,

$$f(x, y, z, p, q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

donnera les valeurs de p et q en x, y, z, qui, étant substituées dans l'équation

$$dz = pdx + qdy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

la rendront susceptible d'une équation en x, y, z qui sera l'équation cherchée. »

« Comme jusqu'ici, rien ne limite la fonction $\varphi(v, w)$, il s'en-
uivrait que l'équation primitive d'une équation du premier ordre
trois variables pourrait renfermer une fonction arbitraire de
leux quantités; il est facile de se convaincre qu'il est impossible
le faire disparaître d'une équation à trois variables une fonction
rbitraire de deux quantités par le moyen de ses deux équations
lérivées. »

Cette objection n'est pas tout à fait exacte. On peut dire sim-
plement ceci : il est assez extraordinaire, au premier abord, que
'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois va-
riables *puisse dépendre de la valeur de* p, *déduite d'une rela-
ion* (15) *qui renferme une fonction arbitraire de deux quantités.*
Quoi qu'il en soit, Lagrange a très-bien expliqué le paradoxe que
nous venons de faire connaître et a donné en même temps le
moyen de trouver l'intégrale générale de l'équation (7), comme
suit :

Au lieu des variables x, y, z, p, qui entrent dans les équa-
tions (11_a) ou ($11'_a$), nous prendrons u, v, w, p. L'équation (14)
pouvant remplacer l'une des équations (11_a) ou ($11'_a$), « dans la
formule $dz - pdx - qdy$, les termes provenant de la variabilité
de p, se détruiront mutuellement, puisque ces mêmes expres-
sions » des anciennes variables en fonction des nouvelles, « ren-
dent cette formule nulle dans le cas où u, v, w sont constantes.
Elle deviendra donc de la forme :

$$Udu + Vdv + Wdw,$$

dans laquelle U, V, W seront des fonctions de p, u, v, w »
(Lagrange). Au lieu de l'équation (14), on peut donc prendre

$$Udu + Vdv + Wdw = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Comme l'équation (15), qui est une solution de celle-ci, ne con-
tient plus explicitement p, il en sera de même de (16), de sorte
que U, V, W sont exprimés au moyen de u, v, w seulement.

Au lieu d'intégrer la relation

$$dz = pdx + qdy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

après y avoir remplacé p et q par leurs valeurs tirées de

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$
$$u = \varphi(v, w), \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

nous pouvons donc intégrer

$$\mathrm{U}du + \mathrm{V}dv + \mathrm{W}dw = 0, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

en tenant compte de

$$u = \varphi(v, w), \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

les fonctions u, v, w ne contenant pas q, même implicitement, si elles ont été déterminées au moyen de (11_a). On tirera de (15)

$$du = \frac{\delta\varphi}{\delta v} dv + \frac{\delta\varphi}{\delta w} dw,$$

et par suite, on aura, au lieu de (16) :

$$\left(\mathrm{U}\frac{\delta\varphi}{\delta v} + \mathrm{V}\right) dv + \left(\mathrm{U}\frac{\delta\varphi}{\delta w} + \mathrm{W}\right) dw = 0, \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

d'où l'on pourra éliminer u et déduire une relation de la forme

$$v = \psi(w). \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

En éliminant p entre (15) et (18) on aura l'intégrale générale cherchée. Si l'on avait laissé q dans u, v, w, on ajouterait l'équation donnée (7) aux équations (15) et (18). En tout cas, on voit que u et v sont des fonctions de w l'une et l'autre, mais l'une d'elles n'est pas arbitraire.

Les équations (13_a), qui sont au nombre de quatre, ne donnent rien de plus que les équations (11_a) ou ($11'_a$), parce que l'une des solutions de (13_a) est $f = 0$, comme on le trouve aisément. En effet, si l'on forme un rapport égal à ceux qui entrent dans (13_a) et dont le numérateur soit

$$\frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy + \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dp} dp + \frac{\delta f}{\delta q} dq,$$

on trouve que le dénominateur est nul. Une des équations (13_a)

peut donc être remplacée par $df=0$, ou $f=$ constante. Cette constante doit être nulle, puisque sans cela l'intégrale trouvée serait incompatible avec l'équation donnée. Le système (15_a) équivaut donc au système ($11'_a$) auquel on ajoute $f=0$ (*).

38. *Recherche de l'intégrale complète* (**). Prenons, pour la relation (15), l'équation

$$u=a+bv+cw,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires, et faisons $b=0$, $c=0$. On trouvera

$$u=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Cette équation, avec

$$f(x,y,z,p,q)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

donnera p et q exprimés au moyen de la constante arbitraire a, et des variables x, y, z. Par suite

$$dz=pdx+qdy$$

conduira à une solution avec deux constantes arbitraires qui sera l'*intégrale complète.*

On peut arriver à celle-ci d'une autre manière, en certains cas. Supposez que dans l'équation (16), on ait $W=0$. Il est clair que l'on satisfera à celle-ci, en posant

$$u=a, \quad v=b,$$

relations qui, avec (7), donneront l'intégrale complète (voir l'exemple du n° 39).

(*) Lagrange, *Leçons*, pp. 386 et suiv. Lacroix, t. II, n° 747, p. 564. Lagrange dit encore : on a

$$v=\psi w, \quad u=\chi w$$

avec la condition

$$U\chi' w+V\psi' w+W=0.$$

(**) C'est là, si nous comprenons bien Lacroix, t. II, n° 741, p. 549, une idée de Charpit. Lacroix, t. III, p. 705, fait connaître quelques remarques de Poisson, sur la liaison qui existe entre le procédé qui donne la solution générale au moyen de l'intégrale complète, et celui que nous avons exposé au numéro précédent.

Remarque. La méthode de Lagrange comporte une double extension dans le cas où le nombre des variables est supérieur à trois. On peut ramener la question à la détermination d'une intégrale d'une équation analogue à (16), telle qu'elle soit en même temps l'intégrale de l'équation donnée; c'est ce qu'a fait Jacobi, dans son extension de la méthode de Lagrange, comme on le verra au chapitre suivant. Cette méthode exige l'intégration complète des équations (11_a), ($11'_a$) ou (13_a). Mais Jacobi a trouvé une autre extension de la méthode de Lagrange, qui mérite le *nom de méthode de Jacobi*, et qui est fondée sur l'*intégration incomplète* d'un certain nombre de systèmes d'équations analogues à (13_a). Cette méthode sera exposée dans la seconde partie de ce mémoire.

§ 10. **Exemples** (*).

39. *Exemple d'application de la méthode du n° 37.* Soit

$$z = pq$$

l'équation donnée. Les équations auxiliaires:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p}$$

(*) Le premier de ces exemples, qui a été admirablement choisi par Lagrange, comme application de la méthode générale, se trouve dans les *Leçons,* etc., p. 393. La classification des autres est due à Legendre (Mémoires de l'Académie de Paris, 1787 : *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles,* pp. 309-351 ; § IX, pp. 337-348 : *Des équations non linéaires du 1er ordre*), résumé par Lacroix, t. II, nos 742-747, pp. 550-564. Les cas particuliers, où l'on parvient à terminer les calculs, ont été empruntés par l'un et l'autre, à Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 1774, 1785. Jacobi (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 2) fait remarquer que plusieurs de ces exemples traités par Lagrange avaient déjà été résolus par Euler, au moyen d'artifices particuliers. Nous faisons aussi quelques emprunts à Boole, *Treatise,* ch. XIV. Pour abréger, nous avons laissé de côté les raisonnements de Lacroix relatifs à une méthode générale, pour découvrir de nouveaux cas d'intégration (t. II, n° 745, p. 558), et l'exemple qu'il en donne, savoir

$$p = -\frac{z}{2x} + \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{qxz}{y}, x, z^2 - qyz\right).$$

On intègre cette équation en posant $ay = qxz$ (t. II, p 561).

conduisent facilement aux intégrales :

$$u = y - p = a, \quad v = \frac{z}{p^2} = b, \quad w = x - \frac{z}{p} = c.$$

On tire de ces trois équations :

$$y = u + p, \quad z = p^2 v, \quad x = w + pv,$$
$$dy = du + dp, \quad dz = 2pvdp + p^2 dv, \quad dx = dw + pdv + vdp.$$

L'équation

$$dz - pdx - qdy = 0$$

prend la forme

$$dw + vdu = 0.$$

Si l'on fait

$$v = \varphi(u, w),$$

cette équation devient

$$dw + \varphi(u, w)\, du = 0,$$

qui conduit à l'intégrale générale.

En posant, au contraire,

$$dw = 0, \quad du = 0,$$

ou

$$w = x - \frac{z}{p} = c, \quad u = y - p = a,$$

on trouve deux relations, qui par élimination de p conduisent à l'intégrale complète

$$(x - c)(y - a) = z.$$

On arrive encore à l'intégrale complète, en prenant pour déterminer p l'équation $(y - p) = a$. On a

$$p = y - a, \quad q = \frac{z}{y - a},$$

$$dz = (y - a)\, dx + \frac{z}{y - a}\, dy,$$

ou

$$\frac{dz}{y - a} - \frac{zdy}{(y - a)^2} = dx.$$

L'intégrale de celle-ci est

$$\frac{z}{y - a} = x - c,$$

ou

$$z = (x - c)(y - a),$$

40. *Exemples dépendant de l'intégration d'une seule des équations auxiliaires.* I. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dx}{-\frac{\partial \varkappa}{\partial p}} = dy.$$

On pourra intégrer cette équation, si l'on a :

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial p} = \mathrm{F}(x, y)$$

c'est-à-dire, si l'équation donnée est de la forme :

$$q = p\mathrm{F}(x, y) + \varphi(x, y).$$

Dans ce cas

$$dz = p(dx + \mathrm{F}dy) + \varphi(x, y)\,dy.$$

Si

$$dx + \mathrm{F}dy = 0$$

a pour facteur d'intégrabilité v, de sorte que

$$v(dx + \mathrm{F}dy) = du,$$

il viendra :

$$dz = \frac{pdu}{v} + \varphi(x, y)\,dy.$$

Supposons que l'on ait éliminé x de φ et de v, en remplaçant cette variable par sa valeur en u et y; on devra avoir

$$\frac{d\left(\frac{p}{v}\right)}{dy} = \frac{d\varphi}{du}.$$

On déduira de là

$$p = v\int \frac{d\varphi}{du}\,dy.$$

Cette valeur de p contiendra une constante arbitraire; la valeur de z en contiendra donc deux et donnera l'intégrale complète (*).

(*) LAGRANGE, Mém. de Berlin, 1772; Œuvres, t. III, 5me cas, p. 562.

Soit, par exemple,

$$xq = py + xe^{x^2+y^2};$$

on aura :

$$F = \frac{y}{x}, \quad v = 2x, \quad u = x^2 + y^2, \quad \varphi(x, y) = e^{x^2+y^2} = e^u, \quad \frac{d\varphi}{du} = e^u,$$

$$p = 2xye^u + 2ax, \; q = 2y^2e^u + e^u + 2ay,$$

$$dz = ye^{x^2+y^2}(2xdx + 2ydy) + e^{x^2+y^2}dy + 2axdx + 2aydy,$$

$$z = ye^{x^2+y^2} + a(x^2 + y^2) + b.$$

II. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$dy = \frac{dp}{\frac{\delta x}{\delta x} + p\frac{\delta x}{\delta z}}.$$

On pourra intégrer cette équation, si l'on a :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\delta x}{\delta x} + p\frac{\delta x}{\delta z} = F(p, y).$$

Cette équation linéaire aux dérivées partielles donne pour x ou q la valeur suivante :

$$q = xF(p, y) + \varphi(p, y, z - px).$$

On déduit de là :

$$dz = pdx + xF(p, y)\,dy + \varphi(p, y, z - px)\,dy.$$

Posons

$$dp - F(p, y)\,dy = 0,$$

ce qui détermine p, et $(z - px) = u$; l'équation précédente deviendra

$$du = \varphi(p, y, u)\,dy,$$

d'où l'on saura éliminer p (*).

Comme cas particuliers, nous citerons : 1° Celui où

$$F(p, y) = \psi' y;$$

alors

$$p = \psi y,$$

$$du = \varphi(\psi y, y, u)\,dy.$$

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1774; Œuvres, t. IV, n° 54, p. 85.

2° Celui où

$$F = 0;$$

alors

$$q = \varphi(p, y, z - px),$$

ou

$$z = px + f(p, y, q).$$

Dans ce cas :

$$z = ax + u,$$
$$du = \psi(a, y, u)\, dy.$$

3° Enfin, comme cas plus particulier encore, l'on peut considérer les deux équations

$$q = \psi(p, y),$$
$$q = \Psi(p),$$

qui ont été traités plus haut (n° 34, I, p. 65).

Au reste, nous avons étudié auparavant l'équation la plus générale dont nous nous occupons ici (n° 21).

III. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dx}{\frac{\delta \varkappa}{\delta p}} = \frac{-dp}{\frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z}}.$$

Posons :

$$\frac{dp}{dx} = F(x, p),$$

ou

$$\frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z} + \frac{\delta \varkappa}{\delta p} F(x, p) = 0.$$

Pour trouver la valeur de $\varkappa$ ou q qui satisfait à cette équation linéaire, nous devrons intégrer le système auxiliaire :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{F(x, p)} = \frac{dq}{0}.$$

Soit $T = a$, l'intégrale de $dp = F(x, p)\, dx$; tirons-en $p = \pi(x, a)$. On aura

$$dz = \pi(x, a)\, dx, \quad z - \int \pi(x, a)\, dx = b;$$

les autres intégrales sont $q = c$, $y = d$. Donc l'équation linéaire qui donne q, aura pour intégrale :

$$q = \varphi\left(y, T, z - \int \pi(x, a)\, dx\right).$$

La relation $dz = pdx + qdy$, devient

$$dz = pdx + \varphi\left(y, \mathrm{T}, z - \int \pi(x, a)\, dx\right).$$

Posons, $p = \pi(x, a)$, et soit

$$z = \int \pi(x, a)\, dx + v,$$

il viendra :

$$dz = pdx + dv = pdx + \varphi(y, a, v)\, dy.$$

On n'aura plus qu'à déterminer v par la relation :

$$dv = \varphi(y, a, v)\, dy.$$

Remarque. Il est visible que ce cas ne diffère pas au fond du précédent, puisque les x et les y jouent un rôle identique dans les équations aux dérivées partielles. Nous nous contenterons donc de donner un exemple particulier, emprunté à Lacroix (*). L'équation :

$$q = (z + px)^2$$

a pour intégrale :

$$z + \frac{a}{x} + \frac{1}{y + b} = 0.$$

IV. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dz}{\varkappa - p\dfrac{\delta \varkappa}{\delta p}} = \frac{dp}{\dfrac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\dfrac{\delta \varkappa}{\delta z}}.$$

Nous poserons, pour rendre cette équation intégrable :

$$\frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z} = \mathrm{F}(z, p)\left(\varkappa - p\frac{\delta \varkappa}{\delta p}\right).$$

Cette équation aux dérivées partielles a pour système d'équations simultanées correspondant :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{p\mathrm{F}(z, p)} = \frac{d\varkappa}{\varkappa \mathrm{F}(z, p)}.$$

Soit $\mathrm{T} = b$ l'intégrale de $dp = \mathrm{F}(z, p)\, dz$, et soit $p = \pi(z, b)$ la

(*) Tome II, n° 741, p. 549.

valeur de p que l'on en déduira; on aura pour les autres intégrales du système auxiliaire,

$$\varkappa = pa, \quad x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)} = c, \quad y = d.$$

L'équation en $\varkappa$ conduit donc à l'intégrale :

$$q = p\varphi\left(y, \mathrm{T}, x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)}\right).$$

Les équations de cette forme donnent pour dz la valeur

$$dz = p\left[dx + \varphi\left(y, \mathrm{T}, x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)}\right) dy\right].$$

On posera

$$p = \pi(z, b), \quad x = \int \frac{dz}{\pi(z, b)} + v.$$

il viendra :

$$dz = \pi(z, b)\left[\frac{dz}{\pi(z, b)} + dv + \varphi(y, b, v)\, dy\right],$$

qui se réduit à l'équation intégrable :

$$dv + \varphi(y, v, b)\, dy = 0.$$

Un cas particulier est celui où

$$q = \varkappa(p, z).$$

On a alors

$$dz = pdx + \varkappa(p, z)\, dy.$$

La condition d'intégrabilité est, en supposant p fonction de z seul, $p = \pi z$, par exemple,

$$\frac{\delta p}{\delta z}\varkappa(p, z) - \left(\frac{\delta \varkappa}{\delta z} - \frac{\delta \varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z}\right) p = 0,$$

ou

$$qdp = pdq.$$

Donc

$$q = ap \quad \text{ou} \quad \varkappa(p, z) = ap.$$

On tire la valeur de πz de cette dernière relation. Cela fait, $p = \pi z$ conduit à la valeur de x :

$$x = \int \frac{dz}{\pi z} + \psi y.$$

D'autre part, $q = a\pi z$ donne

$$ay = \int \frac{dz}{\pi z} + \chi x.$$

Pour que ces deux relations soient identiques, il faut que

$$\psi y = -ay + b, \quad \chi x = -x + b.$$

Donc, enfin, l'intégrale complète est :

$$x + ay - b = \int \frac{dz}{\pi z}.$$

Cette solution ingénieuse est due à Lagrange (*).

Application géométrique. Trouver l'équation d'une surface dans laquelle la longueur de la normale comptée jusqu'au plan des xy *soit égale à l'unité.* L'équation du problème est :

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = 1.$$

Posons

$$p = \pi z, \quad q = a\pi z,$$

on aura :

$$\pi z = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

La solution sera donc

$$x + ay = b - \sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 - z^2},$$

ou

$$(x + ay - b)^2 = (1 + a^2)(1 - z^2).$$

C'est l'équation d'un cylindre de révolution, dont l'axe est représenté par les équations :

$$z = 0, \quad x + ay - b = 0.$$

On trouve pour solution singulière, d'après la règle générale,

$$z = \pm 1.$$

En procédant autrement, on arrive à une intégrale complète

(*) Mémoires de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, 7me cas, p. 566; 1774, Œuvres, t. IV, n° 51, p. 81.

qui représente la sphère. On tire, de l'équation donnée :

$$q = \frac{\sqrt{1 - z^2 - p^2 z^2}}{z}.$$

Par conséquent,

$$2zdz = 2zpdx + 2(1 - z^2 - p^2 z^2)^{1/2} dy.$$

Le premier membre est une différentielle exacte; il en sera de même du premier terme du second, si l'on fait $pz = (a - x)$. Dans cette hypothèse, soit

$$z^2 + (a - x)^2 = v;$$

il viendra

$$2(1 - v)^{1/2} dy = dv,$$

ou

$$(1 - v) = (y - b)^2.$$

Donc enfin :

$$z^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1.$$

Remarque. Dans les divers exemples que nous venons de traiter, nous avons toujours employé la méthode du n° 38, qui consiste à tirer la valeur de p de la solution $u = a$, de l'une des équations auxiliaires. Nous savions *à priori* que nous devions arriver de cette manière à rendre $dz = pdx + qdy$ intégrable. Nous venons de voir *à posteriori* qu'il est bien ainsi.

41. *Quelques exemples dépendant de l'intégration de deux des équations auxiliaires.* 1. Considérons les équations auxiliaires :

$$\frac{dx}{-\frac{\delta \chi}{\delta p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dp}{\frac{\delta \chi}{\delta x} + p\frac{\delta \chi}{\delta z}}.$$

Ces équations seront intégrables si

$$\frac{\delta \chi}{\delta p} \quad \text{et} \quad \frac{\delta \chi}{\delta x} + p\frac{\delta \chi}{\delta z}$$

sont des fonctions de x, y et p seulement. Il suffit pour cela que z entre dans q au premier degré et soit multiplié par une fonction de y seul; autrement dit que

$$q = \mathrm{F}(x, y, p) + z\varphi y.$$

Comme cas particulier, nous pouvons citer celui où

$$\varphi y = 0.$$

On a alors une équation qui ne contient plus z, et on peut lui appliquer la méthode du n° 55. Ainsi, l'équation

$$px + qy = pq$$

donne, de cette manière,

$$p = y + b^{-1}x, \quad q = x + by, \quad 2b(z - a) = (x + by)^2.$$

Lagrange traite, par un artifice spécial, l'équation (*) :

$$q = f\left(p, \frac{x}{y}\right).$$

Il pose

$$x = yu, \quad p = \varphi u,$$

d'où

$$dx = ydu + udy, \quad q = f(\varphi u, u)$$
$$dz = y\varphi udu + \left(f(\varphi u, u) + u\varphi u\right)dy.$$

Il détermine φ par l'équation

$$b + \int \varphi' udu = f(\varphi u, u) + u\varphi u,$$

ce qui donne :

$$z = a + by + y\int \varphi udu.$$

II. Les équations auxiliaires

$$\frac{dx}{-\frac{\partial \chi}{\partial p}} = \frac{dz}{\chi - p\frac{\partial \chi}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial \chi}{\partial x} + p\frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

$$dy = \frac{dz}{\chi - p\frac{\partial \chi}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial \chi}{\partial x} + p\frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

conduisent de même à l'intégration des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$q = F(y, z, p) + px\varphi y,$$
$$q = \varphi y F(x, z, p),$$

ou, au moins, la facilitent considérablement.

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, 6e cas, p. 564. Avec cet exemple se termine l'analyse de tous les cas particuliers traités par l'habile géomètre de Turin.

CHAPITRE III.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES (*).

—

§ 11. *Théorie.*

42. *Réduction de la question à l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées.* Soit donnée l'équation

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si l'on en connaît une solution, les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, en

(*) Cette extension de la méthode de Lagrange, vainement tentée par Charpit, d'après Lacroix, t. II, n° 748, pp. 567-572, a été effectuée par Jacobi, dans le petit mémoire intitulé : *Ueber die Integration*, etc. (Journal de Crelle, t. II, pp. 317-329). Les calculs sont les mêmes que dans la méthode de Pfaff, mais ils sont effectués dans un ordre inverse. Dans la méthode de Lagrange et Jacobi, on ramène l'intégration des équations aux dérivées partielles non linéaires à celle des équations aux dérivées partielles linéaires, ou à celle des équations différentielles simultanées correspondantes; c'est là l'idée fondamentale, qui conduit d'ailleurs à un changement de variables, comme on l'a vu au n° 37. Dans la méthode de Pfaff, au contraire, le changement de variables est l'idée fondamentale, et elle conduit au reste aux équations différentielles simultanées dont nous venons de parler. Comme on le voit, le travail de Jacobi, que nous analysons dans ce chapitre, est éminemment propre à montrer le lien qui existe entre la méthode de Lagrange et celle de Pfaff. C'est pourquoi nous le plaçons ici, quoiqu'il n'ait eu absolument aucune influence sur le développement de la science.

[A. Meyer, dans l'écrit intitulé : *Mémoire sur l'intégration de l'équation générale aux différences partielles du premier ordre d'un nombre quelconque de variables* (Mém. de l'Acad. de Belgique, t. XXVII, 3e pagination, pages 1-24), a reproduit le travail de Jacobi que nous analysons ici, sans y faire d'addition essentielle.]

$z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on en déduira, rendront intégrable l'équation :

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Par conséquent, on aura :

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

ou

$$\frac{\delta p_i}{\delta x_k} + \frac{\delta p_i}{\delta z} p_k = \frac{\delta p_k}{\delta x_i} + \frac{\delta p_k}{\delta z} p_i.$$

Si l'on substitue dans (1) les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ dont nous parlons, et que de plus, l'on remplace z par sa valeur, l'équation (1) deviendra une identité dont nous pourrons déduire, par dérivation :

$$-\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z} p_1 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_1} \quad \ldots \quad (4_1)$$

$$-\frac{\delta f}{\delta x_2} - \frac{\delta f}{\delta z} p_2 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_2} \quad \ldots \quad (4_2)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$-\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_n} \quad \ldots \quad (4_n)$$

Posons :

$$P_1 = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z_1} p_1, \ldots, P_n = -\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n, \quad \ldots \quad (5)$$

$$P = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Introduisant les conditions (3) dans les équations (4) et y ajoutant une équation identique, qui n'est pas différente de (6), on arrive au système d'équations suivantes auxquelles devront satisfaire les valeurs de $z, p_1, \ldots, p_n$, déduites d'une solution quelconque de (1) :

$$P_1 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_1}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_1}{dx_n} \quad \ldots \quad (7_1)$$

$$P_2 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_2}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_2}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_2}{dx_n}, \quad \ldots \quad (7_2)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$P_n = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_n}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_n}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_n} \quad \ldots \quad (7_n)$$

$$P = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dz}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dz}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dz}{dx_n} \quad \ldots \quad (7_{n+1})$$

Il est essentiel de remarquer que, si l'on peut déduire les équations (7) des équations (4) et (5), on ne peut pas inversement déduire les équations (5) de (4) et (7). On peut donc conclure de l'analyse précédente que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, z en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont aux équations (7), contiennent les solutions de l'équation (1); mais la réciproque n'est pas vraie, en général : les solutions du système (7) peuvent ne pas satisfaire à (1).

Il résulte de là qu'il faut chercher, parmi les solutions du système (7), celles qui satisfont à l'équation (1). L'intégration du système (7), d'après le § 7 (voir particulièrement le n° 52), se ramène à celle du système

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta f}{\delta p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{dz}{\mathrm{P}} = \frac{dp_1}{\mathrm{P}_1} = \cdots = \frac{dp_n}{\mathrm{P}_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7_a)$$

Comme

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}\frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n}\frac{\delta f}{\delta p_n} + \mathrm{P}\frac{\delta f}{\delta z} + \mathrm{P}_1\frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + \mathrm{P}_n\frac{\delta f}{\delta p_n} = 0,$$

les rapports qui entrent dans les équations (7_a) sont égaux à

$$\frac{df}{0};$$

autrement dit, une de ces équations peut être remplacée par $df = 0$. Il résulte de là que l'une des intégrales du système (7_a) est $f = c_{2n}$, que nous écrivons $f_{2n} = c_{2n}$; le système intégral des équations (7_a) pourra être représenté par

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \ldots, f_{2n-1} = c_{2n-1}, \quad f_{2n} = c_{2n},$$

les f désignant des fonctions de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, les c des constantes.

Le système (7) aura pour solution $(n+1)$ relations de la forme

$$\mathrm{F}(f_1, f_2, \ldots, f_{2n}) = 0.$$

Reste à particulariser la forme des fonctions F de manière qu'elles donnent la solution de (1).

43. *Changement de variables.* Posons, comme dans le cas des équations à trois variables :

$$f=0,\ f_1=u_1,\ f_2=u_2,\ldots,\ f_{2n-1}=u_{2n-1},\ldots\ldots \quad (8)$$

et déduisons, de ces $2n$ équations, les valeurs des variables

$$x_1,\ldots,x_n,\ p_1,\ldots,p_n,$$

en fonction de

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{2n-1},\ z.$$

Si l'on introduit ces variables dans l'équation

$$dz=p_1dx_1+\cdots+p_ndx_n;\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

elle deviendra :

$$dz=\mathrm{Z}dz+\mathrm{U}_1du_1+\mathrm{U}_2du_2+\cdots+\mathrm{U}_{2n-1}\,du_{2n-1}.\ \ldots \quad (9)$$

Il est facile de prouver que $\mathrm{Z}=1$ et que l'équation (9) ne contient plus z. En effet, on déduit des n premières équations (7_a)

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n\ \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Cette équation (10) peut donc remplacer l'une des équations (7), et il en est de même de l'équation (9), équivalente à (10). Or, les équations (7_a) ont pour solution :

$$u_1=c_1,\quad u_2=c_2,\ldots,u_{2n-1}=c_{2n-1},$$

qui donnent

$$du_1=0,\quad du_2=0,\ldots,du_{2n-1}=0,$$

et par suite transforment (9) en $\mathrm{Z}=1$. Ensuite

$$\mathrm{F}(u_1,u_2,\ldots,u_{2n-1})=0\ \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

est une solution des équations (7_a) et par suite de l'équation (9), ou de

$$\mathrm{U}_1du_1+\cdots+\mathrm{U}_{2n-1}du_{2n-1}=0;\ \ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

celle-ci ne peut donc pas contenir la variable z, qui n'est plus dans (11).

On peut encore démontrer les remarques précédentes, par un calcul direct. On a :

$$\mathrm{Z}=p_1\frac{dx_1}{dz}+p_2\frac{dx_2}{dz}+\cdots+p_n\frac{dx_n}{dz},$$

les valeurs de

$$\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \ldots, \frac{dx_n}{dz}$$

étant déduites des relations (8), qui satisfont à (7_a). Ainsi :

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_1}, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_2}, \ldots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_n}.$$

Par conséquent, d'après (6)

$$Z = \frac{1}{P}\left\{ p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + p_2 \frac{\delta f}{\delta p_2} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n} \right\} = 1.$$

Calculons un des coefficients U. On a, pour l'un quelconque de ces coefficients :

$$U = p_1 \frac{dx_1}{du} + p_2 \frac{dx_2}{du} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{du}.$$

La dérivée de U par rapport à z, est :

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} + p_i \frac{d^2 x_i}{dz du} \right).$$

On peut transformer cette équation au moyen de la relation :

$$p_i \frac{d^2 x_i}{dz du} = \frac{d}{du}\left(p_i \frac{dx_i}{dz} \right) - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz}.$$

Il vient ainsi :

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz} \right) + \frac{d}{du}\sum_1^n p_i \frac{dx_i}{dz},$$

ou

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz} \right),$$

puisque

$$\sum_1^n p_1 \frac{dx_i}{dz} = Z = 1.$$

Nous pouvons maintenant remplacer dans $\frac{dU}{dz}$, les quantités

$$\frac{dp_i}{dz}, \frac{dx_i}{dz}$$

par leurs valeurs déduites des relations (8) ou (7_a). On aura :

$$\frac{dp_i}{dz} = \frac{P_i}{P}, \quad \frac{dx_i}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_i}.$$

Donc

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{P}\sum_1^n \left(P_i \frac{dx_i}{du} - \frac{\delta f}{\delta p_i}\frac{dp_i}{du}\right).$$

Remplaçons P_i par sa valeur :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{P}\sum_1^n \left(-\frac{\delta f}{\delta x_i}\frac{dx_i}{du} - \frac{\delta f}{\delta p_i}\frac{dp_i}{du}\right) - \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta z}\sum_1^n p_i \frac{dx_i}{du}.$$

La première somme est la dérivée par rapport à u de l'expression f, qui est identiquement nulle, la seconde est égale à U. Donc

$$\frac{\frac{dU}{dz}}{U} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{P},$$

ou encore

$$U = Ce^{-\int \frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{P}},$$

C étant une fonction des variables autres que z, savoir u_1, $u_2, \ldots, u_{2n-1}$.

Il résulte de là que l'on peut diviser l'équation (9') par

$$e^{-\int \frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{P}}.$$

Elle deviendra ainsi :

$$C_1 du_1 + C_2 du_2 + \cdots + C_{2n-1} du_{2n-1} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Pfaff a inventé une méthode générale pour intégrer les équations de cette forme. Nous la ferons connaître après avoir montré, sur un bel exemple particulier, l'utilité des tranformations précédentes. Elles suffisent, en effet, dans beaucoup de cas, pour déterminer l'intégrale des équations aux dérivées partielles du premier ordre, parce que souvent l'on parvient à intégrer l'équation (12) sans avoir recours à la méthode de Pfaff.

§ 12. ***Application à l'intégration de l'équation de Schläfli,***
$$a_1(x_2p_3 - x_3p_2)^2 + a_2(x_3p_1 - x_1p_3)^2 + a_3(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 1 \ (^*).$$

44. *Intégration du système d'équations différentielles simultanées auquel conduit la question.* I. Nous poserons :

$$s_1 = x_2p_3 - x_3p_2, \quad s_2 = x_3p_1 - x_1p_3, \quad s_3 = x_1p_2 - x_2p_1.$$

L'équation pourra s'écrire

$$f = \begin{vmatrix} a_1s_1, & a_2s_2, & a_3s_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Les premiers déterminants mineurs du déterminant précédent pourront être représentés dans le tableau suivant :

$$\begin{Bmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 \end{Bmatrix}$$

On aura :

$$\frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x_1} = - p_3a_2s_2 + p_2a_3s_3 = \xi_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x_2} = \xi_2; \quad \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x_3} = \xi_3;$$
$$\frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta p_1} = \quad x_3a_2s_2 - x_2a_3s_3 = \pi_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta p_2} = \pi_2; \quad \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta p_3} = \pi_3.$$

Donc enfin, le système auxiliaire à intégrer est :

$$\frac{dx_1}{\pi_1} = \frac{dx_2}{\pi_2} = \frac{dx_3}{\pi_3} = \frac{dz}{1} = \frac{-dp_1}{\xi_1} = \frac{-dp_2}{\xi_2} = \frac{-dp_3}{\xi_3} \quad \ldots \quad (2)$$

II. A cause des propriétés des déterminants, on a :

$$\pi_1x_1 + \pi_2x_2 + \pi_3x_3 = 0, \quad p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = 0,$$
$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 1, \quad p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + p_3\pi_3 = 1.$$

Par conséquent, on peut tirer des équations différentielles :

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = 0, \qquad p_1dp_1 + p_2dp_2 + p_3dp_3 = 0,$$
$$p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 = dz = -(x_1dp_1 + x_2dp_2 + x_3dp_3).$$

(*) Schlaefli, *Sopra una equazione a differenziali parziale del primo ordine* (Annali di matematica pura ed applicata, serie 2e, t. II, pp. 89-96).

La dernière relation donne encore :

$$d(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = 0.$$

On tire de là, en remarquant que

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (3)$$

trois intégrales qui sont comprises dans les équations suivantes :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2, \qquad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \mathrm{N}^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (4_1)\,(4_2)$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{\mathrm{N}^2}{m^2 \sin^2 \varepsilon}, \quad x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = \mathrm{N} \cot \varepsilon, \; (4_3)\,(4_4)$$

auxquelles il faut ajouter l'équation donnée :

$$a_1s_1^2 + a_2s_2^2 + a_3s_3^2 = 1 \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

N, m, ε sont des constantes arbitraires.

III. On a ensuite :

$$ds_1 = x_2dp_3 + p_3dx_2 - x_3dp_2 - p_2dx_3 = (-x_2\xi_3 + p_3\pi_2 + x_3\xi_2 - p_2\pi_3)\,dz.$$

Mais d'après les propriétés des déterminants :

$$a_2s_2s_3 + x_2\xi_3 + p_2\pi_3 = 0,$$
$$a_3s_3s_2 + x_3\xi_2 + p_3\pi_2 = 0.$$

Donc

$$(a_2 - a_3)\,s_2s_3 = -x_2\xi_3 - p_2\pi_3 + x_3\xi_2 + p_3\pi_2,$$

et, par conséquent,

$$ds_1 = (a_2 - a_3)\,s_2s_3dz.$$

De même

$$ds_2 = (a_3 - a_1)\,s_3s_1dz.$$
$$ds_3 = (a_1 - a_2)\,s_1s_2dz.$$

De ces équations une seule est distincte des précédentes, car on en tire :

$$s_1ds_1 + s_2ds_2 + s_3ds_3 = 0,$$
$$a_1s_1ds_1 + a_2s_2ds_2 + a_3s_3ds_3 = 0,$$

qui conduisent aux relations (1) et (4_2). Nous poserons :

$$du = 2s_1s_2s_3dz.$$

On aura :

$$2s_1 ds_1 = (a_2 - a_3)\, du, \quad 2s_2 ds_2 = (a_3 - a_1)\, du, \quad 2s_3 ds_3 = (a_1 - a_2)\, du,$$

ou, en posant, pour abréger,

$$a_2 - a_3 = b_1, \quad a_3 - a_1 = b_3, \quad a_1 - a_2 = b_3,$$

et intégrant :

$$s_1^2 = b_1 u + A_1,$$
$$s_2^2 = b_2 u + A_2,$$
$$s_3^2 = b_3 u + A_3.$$

Les constantes A_1, A_2, A_3, à cause des relations (1) et (4_2) sont telles que

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A = 1,$$
$$A_1 + A_2 + A_2 = N.$$

De plus on peut supposer A_1 constante absolue, puisque u est une variable que nous choisissons arbitrairement (*). La relation qui existe entre u et z donne ensuite :

$$z = k + \frac{1}{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(A_1 + b_1 u)(A_2 + b_2 u)(A_3 + b_3 u)}}.$$

IV. Cherchons une dernière intégrale. On a :

$$p_1 dx_1 - x_1 dp_1 = (p_1 \pi_1 + x_1 \xi_1)\, dz = (1 - a_1 s_1^2)\, dz = (a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2)\, dz$$
$$p_2 dx_2 - x_2 dp_2 = (p_2 \pi_2 + x_2 \xi_2)\, dz = (1 - a_2 s_2^2)\, dz = (a_3 s_3^2 + a_1 s_1^2)\, dz$$
$$p_3 dx_3 - x_3 dp_3 = (p_3 \pi_3 + x_3 \xi_3)\, dz = (1 - a_3 s_3^2)\, dz = (a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2)\, dz.$$

Or :

$$\begin{vmatrix} x_1, & m^2 \\ p_1, & N \cot \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ p_1, & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \end{vmatrix} = x_2 s_3 - x_3 s_2.$$

Donc :

$$m^2 p_1 = N \cot \varepsilon . x_1 - (x_2 s_3 - x_3 s_2),$$
$$m^2 (p_1 dx_1 - x_1 dp_1) = x_1 d\, (x_2 s_2 - x_3 s_2) - (x_2 s_3 - x_3 s_2)\, dx_1.$$

Posons :

$$N x_1 = m \rho_1 \cos \theta_1, \quad (x_2 s_3 - x_3 s_2) = m \rho_1 \sin \theta_1, \quad \rho_1^2 = s_2^2 + s_3^2,$$

(*) Nous avons vainement essayé de laisser A_1 constante arbitraire et de rendre la solution du n° 45 aussi symétrique que celle du n° 44.

ce qui est permis, puisque :

$$(x_2s_3 - x_3s_2)^2 + N^2x_1^2 = (x_2^2 + x_3^2)(s_2^2 + s_3^2) - (x_2s_2 + x_3s_3)^2 + N^2x_1^2$$
$$= (m^2 - x_1^2)(N^2 - s_1^2) - (x_1s_1)^2 + N^2x_1^2 = m^2(N^2 - s_1^2) = m^2(s_2^2 + s_3^2).$$

On aura :

$$x_1d(x_2s_3 - x_3s_2) = \frac{m}{N}\rho_1\cos\theta_1(m\sin\theta_1d\rho_1 + m\rho_1\cos\theta_1d\theta_1),$$

$$(x_2s_3 - x_3s_2)\,dx_1 = \frac{m}{N}(-\rho_1\sin\theta_1d\theta_1 + \cos\theta_1d\rho)\,m\rho_1\sin\theta_1.$$

Par conséquent :

$$m^2(p_1dx_1 - x_1dp_1) = \frac{m^2}{N}\rho^2d\theta_1 = \frac{m^2(s_2^2 + s_3^2)}{N}d\theta_1.$$

On a donc les équations suivantes, en introduisant des quantités θ_2, θ_3 analogues à θ_1 :

$$(s_2^2 + s_3^2)\,d\theta_1 = N(a_2s_2^2 + a_3s_3^2)\,dz,$$
$$(s_3^2 + s_1^2)\,d\theta_2 = N(a_3s_3^2 + a_1s_1^2)\,dz,$$
$$(s_1^2 + s_2^2)\,d\theta_3 = N(a_1s_1^2 + a_2s_2^2)\,dz.$$

Les quantités s_1, s_2, s_3, ainsi que dz, peuvent s'exprimer au moyen de u. On peut donc écrire :

$$\theta_1 = \alpha_1 + N\int_0^u \frac{a_2s_2^2 + a_3s_3^2}{s_2^2 + s_2^2}dz,$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + N\int_0^u \frac{a_3s_3^2 + a_1s_1^2}{s_3^2 + s_1^2}dz,$$

$$\theta_3 = \alpha_3 + N\int_0^u \frac{a_1s_1^2 + a_2s_2^2}{s_1^2 + s_2^2}dz.$$

Des trois nouvelles constantes α_1, α_2, α_3, une seule est arbitraire. On déduit, en effet, des équations qui définissent θ_1, θ_2, θ_3 :

$$N^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = m^2(\rho_1^2\cos^2\theta_1 + \rho_2^2\cos^2\theta_2 + \rho_3^2\cos^2\theta_3),$$
$$(x_2s_3 - x_3s_2)^2 + (x_3s_1 - x_1s_3)^2 + (x_1s_2 - x_2s_1)^2$$
$$= m^2(\rho_1^2\sin^2\theta_1 + \rho_2^2\sin^2\theta_2 + \rho_3^2\sin^2\theta_3),$$

ou encore, comme on le voit facilement :

$$N^2 = \rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + \rho_2^2 \cos^2 \theta_2 + \rho_3^2 \cos^2 \theta_3,$$
$$N^2 = \rho_1^2 \sin^2 \theta_1 + \rho_2^2 \sin^2 \theta_2 + \rho_3^2 \sin^2 \theta_3.$$

Si l'on fait $u = 0$ dans ces égalités, il vient :

$$N^2 = (A_2 + A_3) \cos^2 \alpha_1 + (A_3 + A_1) \cos^2 \alpha_2 + (A_1 + A_2) \cos^2 \alpha\ ,$$
$$N^2 = (A_2 + A_3) \sin^2 \alpha_1 + (A_3 + A_1) \sin^2 \alpha_2 + (A_1 + A_2) \sin^2 \alpha_3.$$

équations équivalentes.

On trouve une seconde relation de la manière suivante. On a identiquement :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_1 (x_2 s_3 - x_3 s_2) + x_2 (x_3 s_1 - x_1 s_3) + x_3 (x_1 s_2 - x_2 s_1) = 0.$$

Remplaçant les différents facteurs de cette somme de produits par leurs valeurs tirées des équations qui définissent les θ, il viendra :

$$\rho_1^2 \sin 2\theta_1 + \rho_2^2 \sin 2\theta_2 + \rho_3^2 \sin 2\theta_3 = 0.$$

Si l'on fait $u = 0$, on aura :

$$(A_2 + A_3) \sin 2\alpha_1 + (A_3 + A_1) \sin 2\alpha_2 + (A_1 + A_2) \sin 2\alpha_3 = 0.$$

On remarquera que les autres relations entre les quantités A et α sont équivalentes à celle-ci :

$$(A_2 + A_3) \cos 2\alpha_1 + (A_3 + A_1) \cos 2\alpha_2 + (A_1 + A_2) \cos 2\alpha_3 = 0.$$

Pour plus de symétrie, nous poserons encore

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n.$$

Nous n'avons affaire qu'à cinq constantes, m, N, n, k et ε; en effet, les quantités A s'expriment au moyen de N et k, et les quantités α au moyen de n et N. On remarquera que

$$\frac{x}{m}, \quad \frac{y}{m}, \quad \frac{z}{m},$$

dépendent seulement de N et n, z ne contient que k et N.

45. *Intégration de l'équation donnée.* Prenons les quantités m, N, n, ε, k et u pour nouvelles variables. L'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 - dz$$

prendra la forme :

$$-dk + P_1 dm + P_2 dn + P_3 dN,$$

sans contenir $d\varepsilon$, puisque z, x_1, x_2, x_3 ne contiennent pas ε; ni du, puisque, d'après la théorie générale, si z était la sixième variable nouvelle, le coefficient de dz serait nul et que $du = 2s_1 s_2 s_3 dz$. De même nous savons que P_1, P_2, P_3 sont indépendants de z et par suite de u.

I. *Calcul de* $P_1 = p_1 \frac{dx_1}{dm} + p_2 \frac{dx_2}{dm} + p_3 \frac{dx_3}{dm}$. On a :

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{x_1}{m}\right) = 0;$$

donc

$$\frac{dx_1}{dm} = \frac{x_1}{m}.$$

De même :

$$\frac{dx_2}{dm} = \frac{x_2}{m}, \quad \frac{dx_3}{dm} = \frac{x_3}{m}.$$

Par conséquent :

$$P_1 = p_1 \frac{dx_1}{dm} + p_2 \frac{dx_2}{dm} + p_3 \frac{dx_3}{dm} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{m} = \frac{N}{m} \cot \varepsilon.$$

II. *Calcul de* $P_2 = p_1 \frac{dx_1}{dn} + p_2 \frac{dx_2}{dn} + p_3 \frac{dx_3}{dn}$. On a :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m.$$

Donc

$$x_1 \frac{dx_1}{dn} + x_2 \frac{dx_2}{dn} + x_3 \frac{dx_3}{dn} = 0.$$

Par suite :

$$P_2 x_1 = \begin{vmatrix} x_1, & x_1 \frac{dx_1}{dn} + x_2 \frac{dx_2}{dn} + x_3 \frac{dx_3}{dn} \\ p_1, & p_1 \frac{dx_1}{dn} + p_2 \frac{dx_2}{dn} + p_3 \frac{dx_3}{dn} \end{vmatrix}$$

$$= s_3 \frac{dx_2}{dn} - s_2 \frac{dx_3}{dn} = \frac{d}{dn}(x_2 s_3 - x_3 s_2)$$

$$= \frac{d}{dn}(m\rho_1 \sin \theta_1) = m\rho_1 \cos \theta_1 \frac{d\theta}{dx_1} \frac{dx_1}{dn} = Nx_1 \frac{dx_1}{dn}.$$

Donc enfin :

$$P_2 = N \frac{dx_1}{dn}.$$

De même,

$$P_2 = N \frac{dx_2}{dn}, \quad P_2 = N \frac{dx_3}{dn}.$$

D'où, en ajoutant, d'après la définition de n :

$$3P_2 = N \frac{d}{dn} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = N \frac{d.3n}{dn} = 3N.$$

Par conséquent

$$P_2 = N.$$

III. *Calcul de* $P_3 = p_1 \frac{dx_1}{dN} + p_2 \frac{dx_2}{dN} + p_3 \frac{dx_3}{dN} - \frac{dz}{dN}$. L'expression $\frac{dz}{dN}$ est une intégrale définie entre les limites 0 et u, puisque N n'entre dans z qu'implicitement à cause des quantités A qui sont sous le signe d'intégration. Comme on peut faire $u = 0$, dans P_3 sans changer sa valeur, on aura simplement :

$$P_3 = \left(p_1 \frac{dx_1}{dN} + p_2 \frac{dx_2}{dN} + p_3 \frac{dx_3}{dN}\right)_{u=0}.$$

Pour arriver à calculer cette expression, nous serons forcé de faire une hypothèse particulière sur A_1 et α_1. Nous supposerons $A_1 = 0$, $\alpha_1 = n$, ce qui ne changera rien aux calculs précédents, mais simplifiera les suivants en entraînant, pour $u = 0$,

$$s_1 = 0, \quad \frac{d\theta}{dN} = \frac{d\alpha_1}{dN} = 0.$$

On a, comme plus haut :

$$P_3 x_1 = s_3 \frac{dx_2}{dN} - s_2 \frac{dx_3}{dN} = \frac{d}{dN}(x_2 s_3 - s_2 x_3) + x_3 \frac{ds_2}{dN} - x_2 \frac{ds_3}{dN}.$$

Exprimons $(x_2 s_3 - s_2 x_3)$, s_2, s_3 en fonction de N et de ρ_1, et ρ_1 en fonction de s_1, qui ne contient pas N, et de N. On trouvera :

$$x_2 s_3 - x_3 s_2 = m\rho_1 \sin\theta_1; \qquad \rho_1^2 = N^2 - s_1^2;$$

$$(a_2 - a_3) s_2^2 = 1 - a_1 s_1^2 - a_3 \rho_1^2; \quad (a_3 - a_2) s_3^2 = 1 - a_1 s_1^2 - a_2 \rho_1^2.$$

On tire de là :

$$\frac{d\rho_1}{dN} = \frac{N}{\rho_1}, \quad \frac{ds_2}{dN} = \frac{-a_3 N}{(a_2 - a_3) s_2}; \quad \frac{ds_3}{dN} = \frac{-a_2 N}{(a_3 - a_2) s_3}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
P_3 x_1 &= m \sin\theta_1 \frac{N}{\rho_1} + m\rho_1 \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{dN} - \frac{N}{(a_2 - a_3) s_2 s_3}(a_2 x_2 s_2 + a_3 x_3 s_3) \\
&= Nx_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{\rho_1^2}(x_2 s_3 - x_3 s_2) - \frac{N}{(a_2 - a_3) s_2 s_3}(a_2 x_2 s_2 + a_3 x_3 s_3) \\
&= Nx_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{(a_2 - a_3)\rho_1^2 s_2 s_3}\Big\{ x_2 s_2 \left[(a_2 - a_3) s_3^2 - a_2 \rho_1^2\right] \\
&\qquad + x_3 s_3 \left[(a_3 - a_2) s_2^2 - a_3 \rho_1^2\right] \Big\} \\
&= Nx_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{(a_2 - a_3)\rho_1^2 s_2 s_3}(a_1 s_1^2 - 1)(x_2 s_2 + x_3 s_3).
\end{aligned}$$

Comme

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 = 0, \quad a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 = 1,$$

on a encore

$$P_3 x_1 = Nx_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{Nx_1 s_1 (a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2)}{(a_2 - a_3)(s_2^2 + s_3^2) s_2 s_3} = x_1 \left(N \frac{d\theta_1}{dN} + s_1 \frac{d\theta_1}{ds_1} \right).$$

Supprimons le facteur x_1, et faisons $u = 0$, il viendra

$$P_3 = 0.$$

IV. *Achèvement de l'intégration.* Les calculs précédents ramènent l'intégration de l'équation donnée à celle de la suivante :

$$dk = N \frac{\cot\varepsilon}{m} dm + N dn.$$

Choisissant pour k une fonction quelconque de m et n, il viendra :

$$\frac{dk}{dm} = N \frac{\cot\varepsilon}{m}, \quad \frac{dk}{dn} = N.$$

Nous aurons ainsi k, N, $\cot\varepsilon$ exprimés au moyen de m, n. Donc x_1, x_2, x_3, z seront des fonctions de m, n, u ; l'élimination de ces trois quantités donnera l'intégrale générale (*).

(*) Schaefli donne une belle application de la solution précédente, au mouvement d'un corps autour de son centre de gravité (l. c., pp. 94-96).

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DE PFAFF (*).

§ 13. *Transformation de Pfaff.*

46. *Idée générale du problème de Pfaff.* PFAFF a fait dépendre le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre du problème général suivant, qui porte son nom : Étant donnée une expression différentielle :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_m dx_m , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $X_1, X_2, ..., X_m$ sont des fonctions de $x_1, x_2, ..., x_m$, la transformer en une autre de la forme :

$$\lambda (U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{m-1} du_{m-1}) , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où $U_1, U_2, ..., U_{m-1}$ sont des fonctions de $(m - 1)$ nouvelles variables, $u_1, ..., u_{m-1}$, qui sont liées, ainsi que λ, aux anciennes par des équations que l'on doit déterminer.

Supposons ces équations de la forme :

$$x_1 \quad = x_1 (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x_m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_{m-1} = x_{m-1} (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_{m-1})$$

(*) PFAFF, *Methodus generalis, aequationes differentiarum partiarum, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quot cumque variabiles complete integrandi* (Mémoires de Berlin, 1814-1815, pp. 76-136). Une analyse de ce mémoire a été faite par GAUSS (Göttingische gelehrte Anzeigen, 1er juillet 1815; Œuvres, t. III, pp. 231-241), et par JACOBI, *Ueber die Pfaffsche Methode, etc.* (Journal de Crelle, t II, pp. 347-357), *Sur la réduction, etc.* (Journal de Liouville, pp. 161 et suivantes). Les mémoires de JACOBI et la petite note de GAUSS contiennent divers perfectionnements de la méthode de Pfaff, que nous indiquerons plus bas.

On aura, pour l'une quelconque des variables, $x_1, \ldots, x_{m-1}$,

$$dx = \frac{\delta x}{\delta u_1} du_1 + \frac{\delta x}{\delta u_1} du_2 + \cdots + \frac{\delta x}{\delta u_{m-1}} du_{m-1} + \frac{\delta x}{\delta x_m} dx_m \quad . \; . \; (4)$$

Substituons ces valeurs dans l'expression (1). On trouvera :

$$\left.\begin{array}{l} \left(X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_1} + X_2 \frac{\delta x_2}{\delta u_1} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_1}\right) du_1 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_{m-1}} + X_2 \frac{\delta x_2}{\delta u_{m-1}} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_{m-1}}\right) du_{m-1} + \\ \left(X_1 \frac{\delta x_1}{\delta x_m} + X_2 \frac{\delta x_2}{\delta x_m} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + X_m\right) dx_m \end{array}\right\} \; . \; . \; . \, (5)$$

Pour que l'expression (5) prenne la forme (2), il faudra : 1° que le coefficient de dx_m soit nul; 2° que les coefficients de du_1, $du_2, \ldots, du_{m-1}$ soient de la forme $\lambda U_1, \lambda U_2, \ldots, \lambda U_{m-1}$, $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$, étant des fonctions qui ne contiennent plus explicitement que les variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$. On devra avoir pour cela :

$$\frac{d}{dx_m} (\log \lambda U) = \frac{d \log \lambda}{dx_m} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_m} \cdot$$

Les conditions précédentes s'exprimeront donc analytiquement comme suit :

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_1} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_1} = \lambda U_1, \ldots\ldots \quad (6_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_{m-1}} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_{m-1}} = \lambda U_{m-1}, \ldots \quad (6_{m-1})$$

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + X_m = 0, \ldots\ldots \quad (6_m)$$

$$\frac{1}{\lambda U_1} \frac{d\lambda U_1}{dx_m} = \frac{1}{\lambda U_2} \frac{d\lambda U_2}{dx_m} = \cdots = \frac{1}{\lambda U_{m-1}} \frac{d\lambda U_{m-1}}{dx_m} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_m} \cdot \; . \; . \; (7)$$

47. *Détermination des relations qui existent entre les anciennes et les nouvelles variables.* Cherchons les dérivées, par

rapport à x_m, qui entrent dans ces dernières équations. On a :

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = \left(\frac{dX_1}{dx_m}\frac{\delta x_1}{\delta u} + \cdots + \frac{dX_{m-1}}{dx_m}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}\right) + \left(X_1\frac{\delta^2 x_1}{\delta u\delta x_m} + \cdots + X_{m-1}\frac{\delta^2 x_{m-1}}{\delta u\delta x_m}\right).$$

Retranchons de cette équation celle que l'on obtient, en dérivant la relation (6_m) par rapport à u, c'est-à-dire :

$$-\frac{dX_m}{du} = \left(\frac{dX_1}{du}\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \frac{dX_{m-1}}{du}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m}\right) + \left(X_1\frac{\delta^2 x_1}{\delta u\delta x_m} + \cdots + X_{m-1}\frac{\delta^2 x_{m-1}}{\delta u\delta x_m}\right),$$

il viendra :

$$\frac{dX_m}{du} + \frac{d\lambda U}{dx_m} = \left(\frac{dX_1}{dx_m}\frac{\delta x_1}{\delta u} - \frac{dX_1}{du}\frac{\delta x_1}{\delta x_m}\right) + \cdots + \left(\frac{dX_{m-1}}{dx_m}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u} - \frac{dX_{m-1}}{du}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m}\right).$$

Remplaçons maintenant dans cette égalité les dérivées des quantités X par rapport à u et à x_m, par leurs valeurs. On a, en général,

$$\frac{dX}{dx_m} = \frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \frac{\delta X}{\delta x_{m-1}}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + \frac{\delta X}{\delta x_m},$$

$$\frac{dX}{du} = \frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta u} + \cdots + \frac{\delta X}{\delta x_{m-1}}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression de $\frac{d\lambda U}{dx_m}$; nous aurons :

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = \frac{\delta x_1}{\delta u}\left[\left(\frac{\delta X_1}{\delta x_1} - \frac{\delta X_1}{\delta x_1}\right)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \left(\frac{\delta X_1}{\delta x_m} - \frac{\delta X_m}{\delta x_1}\right)\right]$$

. . . .

$$+ \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}\left[\left(\frac{\delta X_{m-1}}{\delta x_1} - \frac{\delta X_1}{\delta x_{m-1}}\right)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \left(\frac{\delta X_{m-1}}{\delta x_m} - \frac{\delta X_m}{\delta x_1}\right)\right]. \quad (8)$$

Posons pour simplifier :

$$\mu\nu = (\mu\nu) = (\mu, \nu) = \frac{\delta X_\mu}{\delta x_\nu} - \frac{\delta X_\nu}{\delta x_\mu},$$

de sorte que

$$(\nu\mu) = -(\mu, \nu); \quad (\mu\mu) = 0,$$

et ensuite :

$$k_1 = (1, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x_m} + (1, 2)\frac{\partial x_2}{\partial x_m} + \cdots + (1, m-1)\frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + (1, m), \quad . \quad (9_1)$$

$$k_2 = (2, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x_m} + (2, 2)\frac{\partial x_2}{\partial x_m} + \cdots + (2, m-1)\frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + (2, m), \quad . \quad (9_2)$$

. . . .

$$k_{m-1} = (m-1, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x_m} + \cdots + (m-1, m-1)\frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + (m-1, m). \quad (9_{m-1})$$

$$k_m = (m, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x_m} + \cdots + (m, m-1)\frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + (m, m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9_m)$$

L'équation générale (8) deviendra :

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = k_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + k_2\frac{\partial x_2}{\partial u} + \cdots + k_{m-1}\frac{\partial x_{m-1}}{\partial u} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

En supposant $u = u_1$, $u = u_2, \ldots, u = u_{m-1}$, on trouvera les $(m-1)$ équations suivantes, auxquelles nous ajoutons une équation identique, déduite des équations (9)

$$\frac{d\lambda U_1}{dx_m} = k_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + k_2\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \cdots + k_{m-1}\frac{\partial x_{m-1}}{\partial u_1}, \quad . \; . \; . \quad (11_1)$$

. . . .

$$\frac{d\lambda U_{m-1}}{dx_m} = k_1\frac{\partial x_1}{\partial u_{m-1}} + k_2\frac{\partial x_2}{\partial u_{m-1}} + \cdots + k_{m-1}\frac{\partial x_{m-1}}{\partial u_{m-1}}, \quad . \; . \quad (11_{m-1})$$

$$0 = k_1\frac{\partial x_1}{\partial x_m} + k_2\frac{\partial x_2}{\partial x_m} + \cdots + k_{m-1}\frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + k_m \quad . \quad (11_m)$$

Comparons ces équations aux relations (6) et (7), et nous verrons que l'on satisfait à toutes les conditions exprimées par ces dernières, en posant :

$$\frac{k_1}{X_1} = \frac{k_2}{X_2} = \cdots = \frac{k_{m-1}}{X_{m-1}} = \frac{k_m}{X_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Chacun de ces rapports sera d'ailleurs égal à

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx_m}.$$

On devra donc, pour effectuer la transformation de Pfaff, intégrer le système (12), où n'entrent que des dérivées par rapport à x_m. On en conclut que l'on pourra prendre les $(m-1)$ constantes de l'intégration pour les nouvelles variables $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Dans des cas particuliers, c'est-à-dire, pour certaines valeurs des fonctions X, les $(m-1)$ équations (12) se réduiront à un nombre moindre et une ou plusieurs des relations (5) resteront arbitraires. Dans ce cas, le plus simple sera de se donner arbitrairement la valeur d'une ou de plusieurs des dérivées

$$\frac{\delta x_1}{\delta x_m}, \frac{\delta x_2}{\delta x_m}, \ldots, \frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m}$$

ce qui revient à prendre un certain nombre de nouvelles variables u, identiques aux anciennes.

48. *Résolution des équations (12), par rapport aux dérivées* $\frac{\delta x}{\delta x_m}$ (*). Pour résoudre les équations (12), nous poserons

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx_m}dx_m = dx_{m+1};$$

(*) Tout ce qui se rapporte à la résolution effective des équations (12) ne fait pas, à proprement parler, partie de la théorie que nous exposons ici. Sur les déterminants gauches et les pfaffiens, nous renvoyons à Baltzer, *Déterminants*, § III, n° 8, p. 21; § VIII, n°s 1-4, pp. 52-60; § IX, n°s 4-5, pp. 67-68. Pfaff et Gauss remarquent qu'il est impossible de résoudre le système (12) quand m est impair, mais n'en donnent pas la démonstration. Jacobi donne les notions les plus essentielles sur ce sujet dans le mémoire cité. Toutefois la théorie des pfaffiens est due surtout à Cayley, dont les travaux sont résumés et complétés par Baltzer, dans l'ouvrage cité. L'élégant artifice que nous donnons plus bas, pour résoudre le système (12) n'est pas dans l'ouvrage de Baltzer (édition française). Nous l'empruntons à un petit mémoire de Cayley, où il est employé incidemment : *Démonstration d'un théorème de*

de cette manière, ces équations prendront la forme symétrique suivante :

$$(1, 1)\, dx_1 + (1, 2)\, dx_2 + \cdots + (1, m)\, dx_m = X_1 dx_{m+1}, \quad . \quad . \quad (13_1)$$
$$(2, 1)\, dx_1 + (2, 2)\, dx_2 + \cdots + (2, m)\, dx_m = X_2 dx_{m+1}, \quad . \quad . \quad (13_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(m, 1)\, dx_1 + (m, 2)\, dx_2 + \cdots + (m, m)\, dx_m = X_m dx_{m+1} \quad . \quad . \quad (13_m)$$

Le déterminant de ce système linéaire est le déterminant symétrique gauche :

$$G = \begin{vmatrix} 11, 12, 13, \ldots, 1m \\ 21, 22, 23, \ldots, 2m \\ 31, 32, 33, \ldots, 3m \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ m1, \;.\;.\;.\;, \; mm \end{vmatrix}$$

Or, celui-ci, comme on le sait, est le carré du pfaffien:

$$(1, 2, 3, \ldots, m),$$

si m est pair, et est identiquement nul, si m est impair. Il résulte de là que la transformation de Pfaff n'est, en général, possible que si m est pair. Dans le cas où m est impair, pour qu'elle soit possible, il faut que les déterminants qui sont au numérateur des inconnues dx_1, dx_2, ..., soient tous nuls en même temps que le dénominateur commun, qui est le déterminant écrit ci-dessus; ce qui revient à dire que les équations (13) ne sont pas toutes distinctes les unes des autres.

Dans le cas où m est pair, Cayley a donné une méthode extrêmement simple pour résoudre ces équations. Posons :

$$-X_1 = (1, m+1), \quad -X_2 = (2, m+1), \ldots, -X_m = (m, m+1).$$

Jacobi par rapport au problème de Pfaff (Journal de Crelle, t. LVII, pp. 273-277), p. 275. En imitant le procédé de Cayley, nous avons pu trouver l'équation (13) sans nous servir des propriétés des déterminants adjoints, comme fait Baltzer.

On pourra écrire comme suit les équations (13) :

$$(1,1)\, dx_1 + (1,2)\, dx_2 + \cdots + (1,m)\, dx_m + (1, m+1)\, dx_{m+1} = 0, \quad (14_1)$$

. . . .

$$(m,1)\, dx_1 + (m,2)\, dx_2 + \cdots + (m,m)\, dx_m + (m, m+1)\, dx_{m+1} = 0. \quad (14_m)$$

On a évidemment,

$$\frac{dx_1}{(2,3,4,\ldots,m,m+1)} = \frac{dx_2}{(3,4,5,\ldots,m+1,1)} = \cdots$$
$$= \frac{dx_m}{(m+1,1,2,\ldots,m-1)} = \frac{dx_{m+1}}{(1,2,3,\ldots,m)},$$

les dénominateurs étant des pfaffiens. En effet, d'après la théorie de ces expressions remarquables, si l'on substitue ces valeurs dans les équations (14), on trouve pour résultat de la substitution les pfaffiens suivants qui sont identiquement nuls, comme ayant deux indices égaux :

$$(1,1,2,3,4,\ldots,m+1),\ (2,1,2,3,4,\ldots,m+1),\ (3,1,2,3,4,\ldots,m+1), \text{etc.}$$

Il est facile d'exprimer au moyen de X_1, X_2, etc., les valeurs de dx_1, dx_2, etc. D'après une propriété fondamentale des pfaffiens, on a :

$$(2,3,4,\ldots,m+1) = -(m+1,2,3,4,\ldots m)$$
$$= -\left[(m+1,2)(3,4,\ldots,m) + (m+1,3)(4,5.\ldots,m,2) + \text{etc}\right],$$

ou encore

$$-(2,3,4,\ldots,m+1) = X_2(3,4,\ldots,m) + X_3(4,5,\ldots,m,2) + \cdots + X_m(2,3,\ldots,m-1).$$

De même

$$-(3,4,5,\ldots,m+1,1) = X_3(4,5,\ldots,m,1) + X_4(5,6,\ldots,m,1,3) + \text{etc.},$$

. . . .

$$-(m+1,1,2,3,\ldots,m-1) = X_1(2,3,4,\ldots,m-1) + X_2(3,4,5,\ldots,m-1,1) + \text{etc.}$$

Dans le cas où m est impair, et par conséquent $(m+1)$ pair, les équations (14) sont incompatibles, ou peuvent se réduire à un

moindre nombre. Il est facile de distinguer les deux cas. Multiplions :

la première par. . . $(2, 3, 4, \ldots, m)$,
la deuxième par. . . $(3, 4, 5, \ldots, m, 1)$,
la troisième par. . . $(4, 5, 6, \ldots, m, 1, 2)$,
etc.

et ajoutons les résultats; les coefficients de dx_1, dx_2, ..., dx_m seront des pfaffiens identiquement nuls comme ayant deux indices égaux. Donc le résultat final sera :

$$[(1, m+1)(2, 3, 4, \ldots, m) + (2, m+1)(3, 4, \ldots, m, 1) + \text{etc.}]\, dx_{m+1} = 0,$$

ou encore,

$$(1, 2, 3, \ldots, m+1) = 0. \quad \quad (15)$$

Dans le cas où m est pair, $(m+1)$ impair, cette équation est satisfaite identiquement; si m est impair, $(m+1)$ pair, le premier membre de cette équation n'étant pas nul, *en général*, les équations (14) ou (13) seront donc incompatibles. Mais, *en particulier*, si les valeurs de $X_1, \ldots, X_m$, sont telles que $(1, 2, 3, \ldots, m+1) = 0$, les équations (13) se réduiront à un nombre moindre et seront compatibles. Cette équation de condition (15) peut prendre la forme suivante :

$$X_1(2, 3, \ldots, m) + X_2(3, 4, \ldots, m, 1) + \cdots + X_m(1, 2, \ldots, m-1) = 0. \quad (15')$$

Elle a déjà été indiquée par Jacobi, qui l'a trouvée d'une manière moins simple que celle que nous indiquons ici.

49. *Extension de la méthode précédente de transformation* (*). Considérons une expression différentielle

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}.$$

(*) Gauss, Œuvres, t. III, pp. 233-234. Gauss fait remarquer que les transformations dont il s'agit ici ne sont comprises qu'implicitement dans le mémoire de Pfaff. Jacobi (Journal de Liouville, t. III, p. 201) expose à peu

Nous venons de voir qu'on peut la transformer en une expression

$$\lambda_1 (Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_{2n-1} dy_{2n-1}).$$

On peut effectuer une transformation analogue dans le cas où il s'agit d'une expression contenant un nombre impair de différentielles :

$$\Omega_1 = Y_1 dy_1 + \cdots + Y_{2n-2}\, dy_{2n-2} + Y_{2n-1} dy_{2n-1}.$$

Pour cela, on transformera d'abord par la théorie précédente $(\Omega_1 - Y_{2n-1}\, dy_{2n-1})$, en regardant y_{2n-1} comme constant, de manière à mettre cette expression sous la forme :

$$\lambda_1 (Z_1 dz_1 + \cdots + Z_{2n-3}\, dz_{2n-3}).$$

On aura évidemment alors :

$$\Omega_1 = \lambda_1 (Z_1 dz_1 + \cdots + Z_{2n-3} dz_{2n-3}) + Z_{2n-2} dy_{2n-1},$$

expression où

$$Z_{2n-2} = Y_{2n-1} - \lambda_1 \left(Z_1 \frac{\delta z_1}{\delta y_{2n-1}} + \cdots + Z_{2n-3} \frac{\delta z_{2n-3}}{\delta y_{2n-1}} \right).$$

Appelons première transformation, celle de Pfaff, dans le cas où m est pair, seconde transformation, celle que nous venons d'indiquer, d'après Gauss. Cela posé, en appliquant $(n-1)$ fois la seconde transformation à l'expression Ω_1, on parviendra à la mettre sous la forme :

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n.$$

Une expression différentielle Ω qui contient une variable et une différentielle de plus, prendra la même forme, si l'on emploie *une* fois la transformation I, $(n-1)$ fois la transformation II. Dans

près les mêmes transformations dans un ordre inverse. Lagrange et Monge ont souvent employé des artifices de calcul semblables à celui de Gauss que nous exposons dans ce numéro.

ce dernier cas, pour effectuer ces transformations, il faut intégrer n systèmes d'équations simultanées analogues à (15), savoir :

1 système de $(2n-1)$ équations simultanées,
1 » » $(2n-3)$ » »
. . . .
1 système de 3 équations simultanées,
1 équation unique.

Dans le cas où il s'agit de transformer une expression Ω_1 contenant une variable de moins, il y a un système de moins à intégrer. Aucun système ne peut être formé qu'après l'intégration du précédent. Il résulte de là qu'en pratique les transformations de Pfaff sont extrêmement compliquées.

§ 14. *Intégration des équations différentielles totales et des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode de Pfaff.*

50. *Intégrale complète d'une équation différentielle totale par la méthode de Pfaff.* Soit à intégrer une équation différentielle totale entre $2n$ ou $(2n-1)$ variables, par exemple, entre $2n$ variables :

$$X_{11}dx_{11}+X_{12}dx_{12}+\cdots+X_{1,2n}dx_{1,2n}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$

On peut d'abord transformer cette expression, comme l'indique Gauss, en une autre de la forme :

$$U_1du_1+U_2du_2+\cdots+U_ndu_n=0.$$

Cela conduit à l'*intégrale complète* donnée par les relations

$$u_1=a_1, \quad u_2=a_2, .\, ., u_n=a_n,$$

les a étant des constantes.

On peut aussi procéder autrement, en suivant la marche un peu plus simple indiquée par Pfaff. On transforme l'équation donnée en la suivante :

$$X_{21}dx_{21}+X_{22}dx_{22}+\cdots+X_{2,2n-1}\,dx_{2,2n-1}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_2)$$

Pour pouvoir y appliquer la même transformation, nous posons

$$x_{2,2n-1}=a_1,$$

et alors on peut mettre (1_2) sous la forme :

$$X_{31}dx_{31}+X_{32}dx_{32}+\cdots+X_{3,2n-3}dx_{3,2n-3}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$

Posons

$$x_{3,2n-3}=a_2,$$

et transformons ensuite (1_3) en

$$X_{41}dx_{41}+X_{42}dx_{42}+\cdots+X_{4,2n-5}dx_{4,2n-5}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_4)$$

On posera encore

$$x_{4,2n-5}=a_3,$$

et on continuera de cette manière, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à

$$X_{n,1}dx_{n,1}+X_{n,2}dx_{n,2}+X_{n,3}dx_{n,3}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_n)$$

On posera

$$x_{n,3}=a_{n-1}.$$

L'équation donnera ensuite une intégrale de la forme :

$$f(x_{n,1}\ ,\ x_{n,2})=a_n.$$

L'ensemble des relations

$$\begin{aligned} x_{2,2n-1}&=a_1\ ,\\ x_{3,2n-3}&=a_2\ ,\\ x_{4,2n-5}&=a_3\ ,\\ &\cdots\cdots\\ x_{n,3}&=a_{n-1}\ ,\\ f&=a_n, \end{aligned}$$

constitue une intégrale de l'équation donnée, avec n constantes

arbitraires ; on peut l'appeler une *intégrale complète* de l'équation donnée (1).

On trouve aussi une intégrale complète avec n constantes arbitraires, quand il s'agit d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables, telles que (1_2).

51. *Intégrales que l'on peut déduire de l'intégrale complète.* Dans la solution précédente, que l'on opère comme Gauss ou comme Pfaff, au fond, l'on met toujours l'équation sous la forme :

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n = 0 \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

et l'on intègre en posant :

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n.$$

Mais ce n'est pas la seule manière d'intégrer cette équation auxiliaire (a). On peut aussi poser, avec Pfaff et Gauss :

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

F étant une fonction quelconque, et associer à cette relation les $(n - 1)$ suivantes, qui donnent avec $F = 0$, une intégrale de (1), dite *intégrale générale* :

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta u_1}}{U_1} = \frac{\frac{\delta F}{\delta u_2}}{U_2} = \cdots = \frac{\frac{\delta F}{\delta u_n}}{U_n}.$$

Jacobi a fait remarquer que l'on pouvait encore trouver d'autres intégrales de la manière suivante. Posons :

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \ldots, F_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

On déduit de là :

$$\frac{\delta F_1}{\delta u_1} du_1 + \frac{\delta F_1}{\delta u_2} du_2 + \cdots + \frac{dF_1}{\delta u_n} du_n = 0,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\frac{\delta F_k}{\delta u_1} du_1 + \frac{\delta F_k}{\delta u_2} du_2 + \cdots + \frac{\delta F_k}{\delta u_n} du_n = 0.$$

Éliminons k différentielles du entre ces équations et (a) et égalons à zéro les coefficients des autres dans le résultat, nous trouverons ainsi $(n - k)$ relations :

$$F_{k+1} = 0, \quad F_{k+2} = 0, \ldots, F_n = 0,$$

qui avec celles que nous avons choisies arbitrairement

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_k = 0,$$

constituent encore un système intégral de l'équation (1) (*).

52. *Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Suivant une ingénieuse remarque de Pfaff, l'intégration d'une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

revient à celle de l'équation différentielle totale :

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n + 0.dp_1 + \cdots + 0.dp_{n-1} + (-1)\, dz = 0, \; . \quad (3)$$

où p_n est censé remplacé par sa valeur déduite de la relation (2).

On peut appliquer la méthode précédente à cette équation (3). Pour cela, on posera

$$\begin{array}{llll} x_{n+1} = p_1, & x_{n+2} = p_2, \ldots, & x_{2n-1} = p_{n-1}, & x_{2n} = z, \\ X_1 \;\; = p_1, & X_2 \;\; = p_2, \ldots, & X_{n-1} = p_{n-1}, & X_n = p_n, \\ X_{n+1} = 0, & X_{n+2} = 0, \ldots, & X_{2n-1} = 0, & X_{2n} = -1. \end{array}$$

Presque toutes les quantités exprimées par le symbole

$$(\mu, \nu)$$

seront nulles, de sorte que les valeurs de $k_1, \ldots, k_{2n}$ se simplifieront beaucoup mais perdront en même temps leur forme symétrique.

(*) On trouve ainsi toutes les solutions, comme il est facile de le voir, en se reportant au n° 12.

On trouve :

$$k_1 = \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_n}{dx_1}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_2 = \frac{dp_2}{dz} - \frac{dp_n}{dx_2}\frac{dx_n}{dz},$$

. . . .

$$k_{n-1} = \frac{dp_{n-1}}{dz} - \frac{dp_n}{dx_{n-1}}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_n = \frac{dp_n}{dx_1}\frac{dx_1}{dz} + \cdots + \frac{dp_n}{dx_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dz} + \frac{dp_n}{dz} + \frac{dp_n}{dp_1}\frac{dp_1}{dz} + \cdots + \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\frac{dp_{n-1}}{dz},$$

$$k_{n+1} = -\frac{dx_1}{dz} - \frac{dp_n}{dp_1}\frac{dx_n}{dz},$$

. . . .

$$k_{2n-1} = -\frac{dx_{n-1}}{dz} - \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_{2n} = -\frac{dp_n}{dz}\frac{dx_n}{dz}.$$

Les équations différentielles de la transformation sont, d'après ces valeurs, en remarquant que chacun des rapports $k : X$ est égal à

$$\frac{k_{2n}}{X_{2n}} = \frac{dp_n}{dz}\frac{dx_n}{dz},$$

et chassant dz :

$$dp_1 = \left(\frac{dp_n}{dx_1} + p_1\frac{dp_n}{dz}\right)dx_n; \quad dx_1 = -\frac{dp_n}{dp_1}dx_n;$$

. . . .

$$dp_{n-1} = \left(\frac{dp_n}{dx_{n-1}} + p_{n-1}\frac{dp_m}{dz}\right)dx_n; \quad dx_{n-1} = -\frac{dp_n}{dp_{n-1}}; dx_n$$

$$dz = \left(p_n - p_1\frac{dp_n}{dp_1} - \cdots - \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\right)dx_n.$$

Pour mettre ces équations sous une forme plus symétrique, nous remarquerons que, d'après l'équation (2), on a :

$$\frac{dp_n}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}}, \quad \frac{dp_n}{dp} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta p}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}}.$$

Introduisant ces valeurs dans les équations de la transformation, elles deviendront :

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta f}{\delta p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{dz}{\mathrm{P}} = \frac{dp_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{dp_2}{\mathrm{P}_2} = \cdots = \frac{dp_n}{\mathrm{P}_n}; \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

si l'on pose, comme dans le chapitre précédent :

$$\mathrm{P}_1 = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z} p_1, \ldots, \mathrm{P}_n = -\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n,$$

$$\mathrm{P} = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n}.$$

Pfaff est donc arrivé identiquement aux mêmes équations auxiliaires auxquelles Jacobi est parvenu plus tard, en donnant à la méthode de Lagrange son extension naturelle (voir le § 11 tout entier). Comme nous l'avons déjà dit, les calculs se font de la même manière dans les deux méthodes, mais dans un ordre inverse.

Dans la méthode primitive de Pfaff, on doit intégrer n systèmes d'équations auxiliaires analogues à (a'), qui donnent n relations contenant n constantes arbitraires. L'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre ces n relations et l'équation donnée conduit à l'*intégrale complète* de l'équation aux dérivées partielles (2).

La formation des autres systèmes auxiliaires (a') ne peut se faire que dans chaque cas particulier, puisqu'ils dépendent des intégrales du premier de ces systèmes (*).

(*) Sur *le problème de Pfaff*, voir les remarquables mémoires de Natani (Journal de Crelle, t. LVIII, pp. 301-328), de Clebsch (Journal de Crelle, t. LIX, pp. 190-192; t., pp. LX 193-251 ; t. LXI, pp. 146-179) et de Dubois-Reymond (*ibid.*, t. LXX, pp. 299-315) ; puis divers écrits de Lie, dans les recueils de l'Académie de Christiania.

§ 15. *Simplification de la méthode de Pfaff. Problème inverse.*

53. *Simplification de la méthode de Pfaff pour l'intégration des équations aux dérivées partielles par Jacobi* (*). En supposant, comme aux nos 42 et 43, que l'on intègre les équations auxiliaires que nous venons de trouver, puis que l'on fasse un changement de variables, on ramènera l'intégration de l'équation donnée à celle de

$$C_1 du_1 + \cdots + C_{2n-1} du_{2n-1} = 0,$$

$u_1, \ldots, u_{2n-1}$ étant les constantes de l'intégration des équations auxiliaires, et les C étant définis par les relations :

$$U = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{du},$$

$$U = Ce^{-\int \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{P}}.$$

Jacobi, s'inspirant des recherches de Hamilton sur la dynamique, a eu l'heureuse idée d'introduire dans cette théorie les valeurs initiales des variables, savoir $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}$ et de

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 171-182, § IX du Mémoire. Jacobi s'étonne que Pfaff n'ait pas trouvé la simplification exposée dans les nos 53 et 54. Mais la chose n'était pas si simple, puisque Jacobi lui-même n'y a pas songé quand il s'est occupé de la méthode de Lagrange. Il fallait, pour cela, introduire dans les équations les valeurs initiales des variables. C'est ce que fit Cauchy dès 1819; Jacobi n'a vu la portée de ce choix des nouvelles variables qu'en 1835, après les travaux de Hamilton sur la dynamique. C'est pourquoi il nous semble que l'on désigne à tort en Allemagne la méthode d'intégration que nous venons d'exposer sous le nom de méthode de Hamilton et Jacobi, puisque bien longtemps avant ces géomètres, Cauchy avait découvert, par une méthode plus directe que celle de Pfaff, les résultats retrouvés plus tard par Jacobi, d'une manière assez pénible. [M. Lie fait remarquer aussi, dans un de ses derniers mémoires, que la méthode de Pfaff, perfectionnée par Jacobi, doit s'appeler *méthode de Cauchy*.]

prendre l'intégrale qui entre dans l'équation précédente entre les limites z_0 et z. Il vient ainsi

$$U = U_0 e^{-\int_0^z \frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{P}}, \quad C = U_0 = p_{10}\frac{dx_{10}}{du} + \cdots + p_{n0}\frac{dx_{n0}}{du}.$$

L'équation à intégrer se réduit à :

$$U_{10}du_1 + \cdots + U_{2n-1,0}du_{2n-1} = 0;$$

ou, tout au long :

$$\begin{aligned} &p_{10}\left(\frac{dx_{10}}{du_1}du_1 + \cdots + \frac{dx_{10}}{du_{2n-1}}du_{2n-1}\right) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ p_{n0}\left(\frac{dx_{n0}}{du_1}du_1 + \cdots + \frac{dx_{n0}}{du_{2n-1}}du_{2n-1}\right) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$p_{10}dx_{10} + \cdots + p_{n0}dx_{n0} = 0.$$

On peut prendre pour système intégral de ces équations :

$$x_{10} = a_1, \quad x_{20} = a_2, \ldots, x_{n0} = a_n,$$

a_1, a_2, ..., a_n désignant des constantes.

De là, la règle suivante pour intégrer l'équation (1). Soit f_0 ce que devient l'une quelconque des fonctions f quand on y fait $z = z_0$. Tirez des relations :

$$f_{10} = u_1, \ldots, f_{2n-1,0} = u_{2n-1}, \quad f_{2n,0} = 0,$$

les valeurs de x_{10}, ..., x_{n0}, p_{10}, ..., p_{n0}, en fonction de u_1, ..., u_{2n-1}. Soient trouvées ainsi les n relations :

$$\begin{aligned} &x_{10} = F_1(u_1, \ldots, u_{2n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_{n0} = F_n(u_1, \ldots, u_{2n-1}). \end{aligned}$$

Pour avoir l'intégrale complète de l'équation (1), il suffira d'éliminer p_1, ..., p_n entre les équations

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n,$$

après que les u sont remplacés par leurs valeurs.

Remarques. I. Si P = 0 en vertu de l'équation donnée, la méthode précédente donne pour une intégrale des équations auxiliaires, $z = z_0$. Dans ce cas, on ne trouve plus directement d'intégrale complète, comme il est facile de le voir, et comme nous le montrerons à propos de la méthode de Cauchy, où la même exception se présente.

II. Au lieu de prendre pour nouvelles variables les u et z, on peut prendre les u et un quelconque des x, ce qui rapproche davantage la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi, de celle de Cauchy. La principale différence entre les deux méthodes consiste en ce que Cauchy emploie $(n - 1)$ nouvelles variables fonction des anciennes, et n constantes arbitraires dès le commencement des calculs, tandis que Pfaff et Jacobi emploient $(2n - 1)$ nouvelles variables et sont forcés, dans la suite des calculs, d'en faire n égales à des constantes, ou au moins, comme nous venons de le voir, d'égaler n fonctions de ces variables à des constantes, ce qui revient au même.

54. *Simplification de la méthode générale de Pfaff par Jacobi* (*). Nous avons indiqué plus haut (n° 53), comment Jacobi, en s'aidant des travaux de Hamilton, a ramené l'intégration de l'équation (2) à celle du seul système (a'). Nous allons faire connaître comment il a pu, d'une manière analogue, former immédiatement toutes les équations auxiliaires, dont on a besoin dans la méthode générale de Pfaff, pour intégrer une équation différentielle totale.

Soit x_{2n}^0 une valeur de x_{2n}, pour laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ prennent les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$. Posons :

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\xi_1, & X_1 = X_1^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\Xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\xi_2, & X_2 = X_2^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\Xi_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\xi_{2n-1}, & X_{2n-1} = X_{2n-1}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\Xi_{2n-1}, \\ x_{2n} = x_{2n}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\xi_{2n}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\Xi_{2n}, \end{array}$$

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 194-201, § XII du mémoire. [Le sujet traité dans ce numéro et le suivant ne fait pas, à proprement parler, partie du sujet de ce mémoire.]

$\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}$ n'étant pas infinis pour $x_{2n} = x_{2n}^0$, et ξ_{2n} étant égal à 1. En introduisant à la place des anciennes variables, leurs valeurs initiales et x_{2n}, on aura

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$
$$= B_1 dx_1^0 + B_2 dx_2^0 + \cdots + B_{2n-1} dx_{2n-1}^0 + B_{2n} dx_{2n}.$$

Supposons que les relations données plus haut entre les nouvelles et les anciennes variables soient celles qui permettent de faire la première transformation de Pfaff, on aura $B_{2n} = 0$; ensuite,

$$B_i = X_i^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_i + (x_{2n} - x_{2n}^0) \sum \frac{d\xi_k}{dx_i^0} X_k^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)^2 \sum \frac{d\xi_k}{dx_i^0} \Xi_k,$$

étant indépendant de x_{2n}, à un facteur λ près, on pourra y faire $x_{2n} = x_{2n}^0$. De cette manière, l'équation donnée deviendra donc

$$X_1^0 dx_1^0 + X_2^0 dx_2^0 + \cdots + X_{2n-1}^0 dx_{2n-1}^0 = 0.$$

Pour intégrer celle-ci, nous poserons,

$$x_{2n-1}^0 = \alpha,$$

puis nous la transformerons en une autre contenant une variable de moins, au moyen de l'intégration d'un système auxiliaire analogue aux équations (12) du § 15 :

$$\frac{k_1}{X_1} = \frac{k_2}{X_2} = \cdots = \frac{k_{2n}}{X_{2n}}.$$

Pour obtenir ces nouvelles équations auxiliaires, il suffira de laisser dans le système précédent les deux dernières équations de côté, et de faire dans les autres $x_{2n} = x_{2n}^0$, puis de remplacer x_{2n-1} par α, x_i par x_i^0. En effet, ces changements étant faits dans les calculs du § 12, donneront les calculs nécessaires pour transformer la dernière équation différentielle totale en

$$X_1^{00} dx_1^{00} + X_2^{00} dx_2^{00} + \cdots + X_{2n-4}^{00} dx_{2n-4}^{00} = 0.$$

Et ainsi de suite. Il est clair que l'on peut continuer de cette manière la formation des systèmes d'équations auxiliaires et arriver au système intégral :

$$x^{0}_{2n-1}=\alpha_1,\quad x^{00}_{2n-3}=\alpha_2,\quad x^{000}_{2n-5}=\alpha_3,\ldots,x^{0^n}_1=\alpha_n.$$

Remarque. Il y a une grande simplification si

$$X_1=0,\ldots,X_{n-r}=0.$$

Dans ce cas, quand on sera arrivé à une équation de la forme :

$$X^{0^r}_{n+1-r}dx^{0^r}_{n+1-r}+\cdots+X^{0^r}_{2n-2r}\,dx^{0^r}_{2n-2r}=0,$$

on pourra s'arrêter. On aura, en effet, déjà r relations :

$$x^{0}_{2n-1}=\alpha_1,\quad x^{0^2}_{2n-3}=\alpha_2,\ldots,x^{0^{r-1}}_{2n+1-2r}=\alpha_r,$$

et l'on pourra en outre poser immédiatement, pour intégrer la dernière transformée :

$$x^{0^r}_{n+1-r}=\alpha_{r+1},\ldots,x^{0^r}_{2n-2r}=\alpha_n.$$

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, cela arrive après la première transformation parce que l'on a $r=(n-1)$.

55. *Problème inverse de celui de Pfaff* (*). Soient

$$x_1=f_1(x_{n+1},\ldots,x_{2n},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\quad\ldots\ldots\quad(4_1)$$

. . . .

$$x_n=f_n(x_{n+1},\ldots,x_{2n},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\quad\ldots\ldots\quad(4_n)$$

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 185-194, § XIV du mémoire, donne le théorème de ce numéro, sans employer le calcul des variations. Dans le § X, pp. 182-185, il démontre le théorème correspondant pour les équations auxiliaires (α'). Nous avons cru préférable, pour ne plus revenir sur la méthode de Pfaff, de placer ici le théorème général, en employant les notations du calcul des variations pour plus de brièveté, et de donner comme cas particulier le théorème relatif aux équations (α'). Notre démonstration générale est imitée de celle de Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 372-375.

Nous avons laissé de côté tout ce qui se rapporte aux équations de la forme indiquée dans la remarque II, pour ne pas entrer dans les théories de la dynamique supérieure, ce qui aurait trop allongé notre travail.

n relations satisfaisant à l'équation différentielle totale

$$X_1\,dx_1 + \cdots + X_{2n}dx_{2n} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

de sorte que

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} + X_{n+1} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (6_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} + X_{2n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (6_n)$$

Posons, en outre, les n relations

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1} + \lambda\beta_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (7_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} + \lambda\beta_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7_n)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont de nouvelles constantes. Les équations (6) et (7), après élimination de λ, contiennent $(2n-1)$ constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\frac{\beta_1}{\beta_n}, \ldots, \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}$, et sont les intégrales des $(2n-1)$ équations rencontrées par Pfaff dans la recherche de l'intégrale de (5).

Imaginons, en effet, que l'on déduise des équations (6) et (7) les variables x en fonction de λ, des α et des β. Faisons varier dans les équations (6) et (7) α et β de $\delta\alpha$ et $\delta\beta$, les x varieront de δx. Cela posé, multiplions les équations $(6_1), \ldots, (6_n), (7_1), \ldots, (7_n)$ respectivement par $\delta x_{n+1}, \delta x_{n+2}, \ldots, \delta x_{2n}, \delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$; en ajoutant les résultats, il viendra à cause de (4),

$$X_1\delta x_1 + \cdots + X_{2n}\delta x_{2n} + \lambda(\beta_1\delta\alpha_1 + \cdots + \beta_n\delta\alpha_n) = 0. \quad \ldots \quad (8)$$

Dérivons par rapport à λ, et cette équation donnera :

$$\Sigma X\delta\frac{dx}{d\lambda} + \Sigma\frac{dX}{d\lambda}\delta x + \Sigma\beta d\alpha = 0. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

En multipliant les équations (6) par $\frac{dx_{n+1}}{d\lambda}, \cdots, \frac{dx_{2n}}{d\lambda}$, et ajoutant les résultats, on trouve la relation suivante, évidente d'ailleurs d'après (5) :

$$X_1\frac{dx_1}{d\lambda} + \cdots + X_{2n}\frac{dx_{2n}}{d\lambda} = 0,$$

d'où, par variation,

$$\Sigma X\delta\frac{dx}{d\lambda}+\Sigma\frac{dx}{\delta\lambda}\delta X=0. \qquad (10)$$

Retranchons de l'équation (9), l'équation (10) et l'équation (8) divisée par λ, il viendra

$$\Sigma\frac{dX}{d\lambda}\delta x-\Sigma\frac{dx}{d\lambda}\delta X-\frac{\Sigma X\delta x}{\lambda}=0.$$

On déduit de là, en égalant à zéro, les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_{2n}$,

$$\frac{dX_1}{d\lambda}-\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\delta X_1}{\delta x_1}+\cdots+\frac{dx_{2n}}{\delta\lambda}\frac{\delta X_{2n}}{\delta x_1}\right)-\frac{X_1}{\lambda}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dX_{2n}}{d\lambda}-\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\delta X}{\delta x_{2n}}+\cdots+\frac{dx_{2n}}{\delta\lambda}\frac{\delta X_{2n}}{\delta x_{2n}}\right)-\frac{X_{2n}}{\lambda}=0.$$

En écrivant, au lieu de $\frac{dX}{d\lambda}$, la valeur :

$$\frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta\lambda}+\cdots+\frac{\delta X}{\delta x_{2n}}\frac{\delta x_{2n}}{\delta\lambda},$$

les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$\frac{dx_1}{d\lambda}(1,1)+\frac{dx_2}{d\lambda}(1,2)+\cdots+\frac{dx_{2n}}{d\lambda}(1,2n)=\frac{X_1}{\lambda},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_1}{d\lambda}(2n,1)+\frac{dx_2}{d\lambda}(2n,2)+\cdots+\frac{dx_{2n}}{d\lambda}(2n,2n)=\frac{X_{2n}}{\lambda},$$

ce qui est le système auxiliaire de Pfaff.

Remarques. I. Pour que les variations des x soient indépendantes en même temps que celle des α et des β, comme on le suppose plus haut, il faut que les équations (6) et (7) soient telles que

$$D\frac{x_1,\ldots,x_{2n}}{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n}$$

ne soit pas identiquement nul.

II. Ce qui précède peut s'appliquer, en particulier, aux équations auxiliaires auxquelles on est conduit quand on cherche l'intégrale de l'équation

$$p_n + f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0.$$

Si

$$z = F(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

est une solution complète de cette équation, ou de

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} - f dx_n,$$

on aura, pour intégrale des équations auxiliaires :

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\delta f}{\delta p_1}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\delta f}{\delta p_{n-1}},$$

$$\frac{dp_1}{dx_n} = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - p_1 \frac{\delta f}{\delta z}, \ldots, \frac{dp_{n-1}}{dx_n} = -\frac{\delta f}{\delta x_{n-1}} - p_{n-1} \frac{\delta f}{\delta z},$$

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_{n-1} \frac{\delta f}{\delta p_{n-1}} - f,$$

le système

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = p_1, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_{n-1}} = p_{n-1}, F = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha_1} = \beta_1 \frac{\delta F}{\delta \alpha_n}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1} \frac{\delta F}{\delta \alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

contenant $2n$ constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

On déduit ces résultats des précédents, au moyen des hypothèses du nº 52. La démonstration directe en est d'ailleurs très-simple (*).

(*) Binet (C. R., t. XIV, pp. 654-660, t. XV, pp. 74-80), Cauchy, § II du mémoire analysé au Livre III (Exercices d'analyse et de phys. math., t. II, pp. 261-272), Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 564-569, ont employé le calcul des variations pour exposer la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi ou des recherches équivalentes sur les équations aux dérivées partielles. Nous croyons pouvoir nous borner ici à donner une idée de ce mode d'exposition, à propos du problème inverse de celui de Pfaff. On abrége considérablement les écritures par ce moyen, mais l'exposition devient moins claire.

III. Puisque $z = F$ est une solution complète de l'équation $p_n + f = 0$, les fonctions F, $\varphi_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \varphi_{n-1} = \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$, considérées comme fonctions des constantes, doivent être indépendantes, sans quoi il y aurait une relation entre ces fonctions et, par suite, z satisferait à une seconde équation aux dérivées partielles. Or, si cela était, cette équation et la donnée représenteraient seulement au plus ∞^{2n-1} éléments, et il en serait de même de $z = F$ et de ses dérivées; par conséquent $z = F$ contiendrait au moins une constante supplémentaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc, en posant :

$$\psi_1 = \frac{\partial F}{\partial a_1}, \ldots, \psi_n = \frac{\partial F}{\partial a_n},$$

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & ,\ldots, & \psi_n \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} & ,\ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = (\psi_1)^n \, D \, \frac{\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right), \ldots, \left(\frac{\psi_{n-1}}{\psi_1}\right)}{x_1, \ldots, x_{n-1}} \gtrless 0 \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

Il résulte de là que si l'on résout les équations (I) et (II), par rapport aux constantes, on trouvera des fonctions des variables indépendantes les unes des autres. En effet, par hypothèse, des équations (I), on peut déduire les valeurs des α, puisque le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport aux α n'est pas nul. Des équations (II) on peut déduire les valeurs des constantes β à cause de l'inégalité (III) (*).

(*) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 471-475.

LIVRE II.

MÉTHODE DE JACOBI (*).

CHAPITRE I.

PRINCIPES.

---

§ 16. ***Propriétés fondamentales des expressions symboliques de Poisson*** (**).

56. *Définitions.* Soient φ et ψ deux fonctions explicites des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$; supposons que de plus φ contienne explicitement r fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et ψ s fonctions $b_1, b_2, \ldots, b_s$ de ces mêmes variables, de sorte que

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_r),$$
$$\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, b_1, \ldots, b_s).$$

(*) La méthode nouvelle de Jacobi a été publiée par Clebsch dans le t. LX du Journal de Crelle en 1862, sous le titre *Nova methodus*, etc., puis dans les *Vorlesungen über Dynamik*, leçons 21-23 et passim, en 1866; mais Jacobi possédait cette méthode dès 1838, comme il résulte des indications données plus bas, note 1 du § 17. C'est pourquoi cette méthode doit porter le nom de Jacobi, quoiqu'elle ait été retrouvée avant 1862, par Liouville, Bour et Donkin, dans ses traits essentiels (voir la note citée). Nous rattachons à la méthode de Jacobi les recherches qui en sont la suite naturelle.

(**) Poisson, *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique* (Journal de l'école polytechnique, 15e cahier, p. 281), a le premier employé la notation (φ, ψ). La notation $[\varphi, \psi]$ s'est ensuite introduite d'elle-même. Nous proposons les trois autres notations symboliques pour simplifier les démonstrations du § 18. Nous suivons, en général, dans ce § 16, l'exposition d'Imschenetsky, § 16, pp. 48-52.

Nous poserons :

$$(\varphi, \psi) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix}.$$

$$[\varphi, \psi) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \dfrac{d \varphi}{d x_i}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \dfrac{d \varphi}{d p_i}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix},$$

$$(\varphi, \psi] = \sum_1^n \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \dfrac{d \psi}{d x_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \dfrac{d \psi}{d p_i} \end{vmatrix},$$

$$[\varphi, \psi] = \sum_1^n \begin{vmatrix} \dfrac{d \varphi}{d x_i}, & \dfrac{d \psi}{d x_i} \\ \dfrac{d \varphi}{d p_i}, & \dfrac{d \psi}{d x_i} \end{vmatrix},$$

$$(\overline{\varphi, \psi}) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \dfrac{d \varphi}{d x_i}, & \dfrac{d \psi}{d x_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{d p_i}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix}.$$

Au besoin, quand cela ne sera cause d'aucune ambiguïté, nous écrirons, au lieu de n'importe quel de ces symboles,

$$\varphi\psi \quad \text{ou} \quad \varphi, \psi,$$

en supprimant les parenthèses et les crochets.

On trouve immédiatement les formules suivantes :

$$\varphi\varphi = 0; \quad \varphi\psi = -\psi\varphi; \quad \varphi, -\psi = -\varphi\psi; \quad \text{constante}, \psi = 0; \quad . \quad (1)$$

$$(x_i, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}; \quad (x_i, \psi] = \frac{d\psi}{dp_i}; \quad (p_i, \psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}; \quad (p_i, \psi] = -\frac{d\psi}{dx_i}; \quad (2)$$

$$(x_i, x_k) = (p_i, p_k) = (x_i, p_k) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Si u désigne une des variables x ou p, on trouve encore, en supposant que D indique une dérivation par rapport à u,

$$D(\varphi,\psi)=(D\varphi,\psi)+(\varphi,D\psi), \quad \ldots \quad (4_1)$$

$$D^2(\varphi,\psi)=(D^2\varphi,\psi)+2(D\varphi,D\psi)+(\varphi,D^2\psi); \quad \ldots \quad (4_2)$$

. . . .

$$\left.\begin{array}{l} D^n(\varphi,\psi)=(D^n\varphi,\psi)+\frac{n}{1}(D^{n-1}\varphi,D\psi)+\frac{n(n-1)}{1.2}(D^{n-2}\varphi,D^2\psi)+\cdots \\ \qquad +\frac{n(n-1)}{1.2}(D^2\varphi,D^{n-2}\psi)+\frac{n}{1}(D\varphi,D^{n-1}\psi)+(\varphi,D^n\psi) \end{array}\right\}, \quad (4_n)$$

dont l'analogie avec la formule de Leibniz pour la recherche de $D^n\varphi\psi$ est évidente (*). A priori, d'ailleurs, cette analogie doit exister puisque les expressions symboliques de Poisson sont des sommes de produits de deux fonctions, et cette remarque suffit pour démontrer les formules (4).

57. *Développements des diverses expressions* $\varphi\psi$. On a immédiatement par les propriétés élémentaires des déterminants :

$$(\overline{\varphi,\psi})=\Sigma\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}, & \frac{\partial\psi}{\partial p} \end{vmatrix}$$

$$=\Sigma\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p} & , \frac{\partial\psi}{\partial p} \end{vmatrix}$$

Cette équation prend une forme remarquable si $r=s=n$, et si $a=b=p$, les p étant supposés fonction des x. Alors il vient, en développant le déterminant du second membre

$$(\overline{\varphi,\psi})=(\varphi,\psi)+\Sigma_i\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial p_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right\}. \quad \ldots \quad (5)$$

la somme double s'étendant aux valeurs 1, 2, 3, ..., n de i et k.

(*) Les formules (4) sont données par IMSCHENETSKY, pp. 51-52.

L'expression $[\varphi, \psi]$ donne un développement semblable. Elle est égale à

$$\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta x}+\frac{\delta\varphi}{\delta a_1}\frac{\delta a_1}{\delta x}+\cdots+\frac{\delta\varphi}{\delta a_r}\frac{\delta a_r}{\delta x}, & \frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta b_1}\frac{\delta b_1}{\delta x}+\cdots+\frac{\delta\psi}{\delta b_s}\frac{\delta b_s}{\delta x} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta p}+\frac{\delta\varphi}{\delta a_1}\frac{\delta a_1}{\delta p}+\cdots+\frac{\delta\varphi}{\delta a_r}\frac{\delta a_r}{\delta p}, & \frac{\delta\psi}{\delta p}+\frac{\delta\psi}{\delta b_1}\frac{\delta b_1}{\delta p}+\cdots+\frac{\delta\psi}{\delta b_s}\frac{\delta b_s}{\delta p} \end{vmatrix}$$

En développant cette expression, on trouve la formule

$$[\varphi,\psi]=(\varphi,\psi)+\Sigma\frac{\delta\psi}{\delta b}(\varphi,b)+\Sigma\frac{\delta\varphi}{\delta a}(a,\psi)+\Sigma\Sigma\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta b}(a,b).\quad .\ (6)$$

En particulier, si $r=s$, $a_i=b_i$,

$$[\varphi,\psi]=(\varphi,\psi)+\Sigma\left\{(\varphi,a)\frac{\delta\psi}{\delta a}-(\psi,a)\frac{\delta\varphi}{\delta a}\right\}+\Sigma_i\Sigma_k\left\{\frac{\delta\varphi}{\delta a_i}\frac{\delta\psi}{\delta a_k}-\frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_i}\right\}(a_i,a_k)\ (6')$$

la somme double du second membre se rapportant aux valeurs de i inférieure à r, et aux valeurs de k supérieures à i, ou si l'on veut, 1, 2, 3, ..., r de i et de k, puisque les termes (a_i, a_i) se détruisent en vertu de la première formule (1).

Si φ et ψ ne contenaient explicitement que les a, cette formule (6′) se réduirait à

$$[\varphi,\psi]=\Sigma\Sigma\left\{\frac{\delta\varphi}{\delta a_i}\frac{\delta\psi}{\delta a_k}-\frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_i}\right\}(a_i,a_k).\ .\ .\ .\ .\ .\ (6'')$$

Si φ ne contenait pas les fonctions a, et si ψ ne contenait que les fonctions a, la formule (6) conduirait à celle-ci :

$$[\varphi,\psi]=\Sigma(\varphi,a)\frac{\delta\psi}{\delta a}\cdot\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6''')$$

On arrive à un développement plus utile, mais moins naturel, de l'expression $[\varphi, \psi]$, en partant de la formule peu connue relative aux déterminants :

$$\begin{vmatrix} M+m, & N+n \\ P+p, & Q+q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} M, & N+n \\ P, & Q+q \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} M+m, & N \\ P+p, & Q \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} M, & N \\ P, & Q \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m, & n \\ p, & q \end{vmatrix}$$

Soient, dans cette formule (7),

$$M + m = \frac{d\varphi}{dx}, \quad N + n = \frac{d\psi}{dx}, \quad M = \frac{\delta\varphi}{\delta x}, \quad N = \frac{\delta\psi}{\delta x},$$

$$P + p = \frac{d\varphi}{dp}, \quad Q + q = \frac{d\psi}{dp}, \quad P = \frac{\delta\varphi}{\delta p}, \quad Q = \frac{\delta\psi}{\delta p}.$$

et faisons la somme de toutes les expressions semblables, il viendra immédiatement

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi] + [\varphi, \psi) - (\varphi, \psi) + \Sigma\Sigma \frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta b}(a, b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Si en particulier, $a = b$, $r = s$, cette formule devient :

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi] + [\varphi, \psi) - (\varphi, \psi) + \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i}\frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) \quad . \quad (8')$$

Un cas extrêmement remarquable est celui où la fonction φ se réduit à p_i et ψ à p_k. On a alors, d'après les formules (2) et (3),

$$[\varphi, \psi] = (p_i, p_k) = 0;$$

$$[\varphi, \psi) = (p_i, \psi) = -\frac{\delta\psi}{\delta x_i} = -\frac{\delta p_k}{\delta x_i}; \quad (\varphi, \psi] = \frac{\delta p_i}{\delta x_k};$$

par suite, la formule (8′) donne

$$\frac{\delta p_k}{\delta x_i} - \frac{\delta p_i}{\delta x_k} = \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i}\frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) - (\varphi, \psi) \quad . \quad . \quad . \quad (8'')$$

Si, en particulier, $(\varphi, \psi) = 0$, cette formule se réduit à

$$\frac{\delta p_k}{\delta x_i} - \frac{\delta p_i}{\delta x_k} = \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i}\frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8''')$$

(*) Nous empruntons les formules (6) à Imschenetsky, pp. 30-31. Les autres sous leur forme générale sont nouvelles. Contrairement à l'usage, nous laissons dans les sommes les termes qui se détruisent deux à deux, parce que leur suppression introduit dans les formules une complication inutile.

17. *Théorème fondamental de Jacobi* (*).

58. *Forme spéciale des conditions* $(\varphi, \psi) = 0$, *quand* φ *et* ψ *sont linéaires par rapport aux dérivées partielles de la variable dépendante.* Soit R une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et

$$\rho_1 = \frac{dR}{du_1}, \quad \rho_2 = \frac{dR}{du_2}, \cdots, \rho_m = \frac{dR}{du_m},$$

$$I = AR = a_1 \frac{dR}{du_1} + \cdots + a_m \frac{dR}{du_m} = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \cdots + a_m\rho_m,$$

$$J = BR = b_1 \frac{dR}{du_1} + \cdots + b_m \frac{dR}{dR_m} = b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + \cdots + b_m\rho_m,$$

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 23-26. Ce résumé se trouve aussi dans Imschenetsky, § 25, pp. 141-144, qui donne, en outre, la démonstration de Donkin, p. 145, pour le théorème fondamental; ensuite une démonstration qui lui est propre, n° 39, pp. 53-55; et dans Graindorge, V, pp. 33-41.

Il résulte d'un passage de la *Nova methodus*, § 28, signalé par Clebsch, que Jacobi possédait son principe fondamental dès 1838. Ce principe se trouve virtuellement contenu dans le *théorème de Poisson* (*Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de l'École polytechnique, 15e cahier, p 280), dont son auteur lui-même, ni Lagrange ne soupçonnèrent l'importance, comme le remarque Jacobi, *Nova methodus*, § 28. A la mort de Poisson, Jacobi appela l'attention sur le théorème (C. R., année 1840, p. 529), mais malheureusement sa *Nova methodus* ne fut publiée qu'en 1862 par Clebsch, *sans aucun changement*, sauf une petite addition d'une page à la fin du § 52, comme nous l'avons appris de la bouche même de ce géomètre. C'est donc par erreur que Imschenetsky dit que Clebsch « *a rédigé le travail de Jacobi d'après les matériaux trouvés dans ses papiers* » (page 6). Mais, il importe de faire remarquer avec le savant russe (pp. 124 et 145), que Donkin a trouvé le théorème fondamental de son côté (Philosophical Transactions, 1854, part. I, pp. 71 et 93); que Liouville l'a également démontré dans son cours de 1853, d'après ce que dit Bour, dans son mémoire, *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (Journal de l'École polytechnique, 39e cahier, pp. 148-191), p. 168, où il l'appelle *théorème de Liouville.* Néanmoins, il convient de conserver à ce théorème le nom de *téhorème de Jacobi*, parce que ce géomètre en a plus qu'aucun autre révélé la fécondité.

$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ étant des fonctions quelconques des u, et A et B étant des symboles d'opération définis par les équations précédentes.

Cherchons l'expression

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial u_i}, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \rho_i}, & \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \rho_i} \end{vmatrix}.$$

Elle sera égale à

$$\sum_1^m \begin{vmatrix} \frac{\partial (a_1\rho_1 + \cdots + a_m\rho_m)}{\partial u_i}, & \frac{\partial (b_1\rho_1 + \cdots + b_m\rho_m)}{\partial u_i} \\ a_i & b_i \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en réunissant les divers termes multipliés par $\rho_1, \ldots, \rho_m$:

$$\rho_1 \left[\left(b_1 \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + b_2 \frac{\partial a_1}{\partial u_2} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial u_1} \right) - \left(a_1 \frac{\partial b_1}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial b_1}{\partial u_2} + \cdots + a_m \frac{\partial b_1}{\partial u_m} \right) \right] +$$

. . . .

$$\rho_m \left[\left(b_1 \frac{\partial a_m}{\partial u_1} + b_2 \frac{\partial a_m}{\partial u_2} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial u_m} \right) - \left(a_1 \frac{\partial b_m}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial b_m}{\partial u_2} + \cdots + a_m \frac{\partial b_m}{\partial u_m} \right) \right];$$

ou encore

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \rho_1 (\mathrm{B}a_1 - \mathrm{A}b_1) + \rho_2 (\mathrm{B}a_2 - \mathrm{A}b_2) + \cdots + \rho_m (\mathrm{B}a_m - \mathrm{A}b_m).$$

Si l'on ajoute à l'ensemble des termes qui ont le signe $+$ dans (I, J), tous les termes de la forme

$$a_i b_j \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial u_i \partial u_j},$$

et si l'on retranche la même quantité des autres termes, on reconnaît immédiatement que l'ensemble des termes positifs représente BAR, et les autres $-$ABR.

Donc enfin,

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \mathrm{BAR} - \mathrm{ABR} = (\mathrm{BA} - \mathrm{AB})\,\mathrm{R}.$$

Corollaires. I. L'opération (BA — AB) n'introduit pas de dérivées secondes, mais seulement des dérivées premières de la fonction sur laquelle on opère.

II. Si l'on a identiquement $(I, J) = 0$, ou si l'on a identiquement $Ba - Ab = 0$, on a aussi :

$$ABR = BAR,$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir les opérations A et B. Si l'on convient d'écrire A^iR, au lieu de $A \,.\, A^{i-1}R$, on en conclut qu'on peut écrire aussi

$$A^m B^n R = B^n A^m R, \text{ etc.}$$

Il résulte de là que, si R est une solution de $AR = 0$, il en est de même de $B^m R$. Car $A \,.\, B^m R = B^m \,.\, AR = B^m 0 = 0$.

Jacobi a donné de ce corollaire l'élégante démonstration que voici. Soit posé

$$a_i = \frac{du_i}{dt}, \quad b_i = \frac{du_i}{ds}.$$

On aura

$$\frac{da_i}{ds} = \frac{db_i}{dt},$$

ou encore :

$$\frac{da_i}{du_1}\frac{du_1}{ds} + \frac{da_i}{du_2}\frac{du_3}{ds} + \cdots + \frac{da_i}{du_m}\frac{du_m}{ds} = \frac{db_i}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{db_i}{du_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{db_i}{du_m}\frac{du_m}{dt},$$

c'est-à-dire, successivement :

$$\left(b_1\frac{da_i}{du_1} + \cdots + b_m\frac{da_i}{du_m}\right) - \left(a_1\frac{db_i}{du_1} + \cdots + a_m\frac{db_i}{du_m}\right) = 0,$$

$$Ba_i - Ab_i = 0.$$

Remarquons ensuite qu'il viendra :

$$I = a_1\frac{dR}{du_1} + \cdots a_m\frac{dR}{du_m} = \frac{dR}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \cdots + \frac{dR}{du_m}\frac{du_m}{dt} = \frac{dR}{dt} = AR,$$

$$J = \frac{dR}{ds} = BR.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{BAR} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{R}}{ds}}{dt} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}}{ds} = \mathrm{ABR}.$$

59. *Théorème fondamental de Jacobi. Démonstration de Jacobi.* Les premiers membres des équations (φ, ψ) sont linéaires par rapport aux dérivées de l'une des fonctions φ ou ψ. En appliquant à ces expressions la formule principale du numéro précédent, on arrive au théorème fondamental de Jacobi. Soient $m = 2n$ et

$$u_1 = p_1,\quad u_2 = p_2, \ldots,\quad u_n = p_n,\quad u_{n+1} = x_1, \ldots, u_m = x_n.$$

Posons

$$\mathrm{AR} = (\mathrm{M}, \mathrm{R}) = \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_n} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right),$$

$$\mathrm{BR} = (\mathrm{N}, \mathrm{R}) = \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_n} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right),$$

de sorte que, pour $i < n + 1$,

$$a_i = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i},\quad a_{n+i} = -\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_i},\quad b = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_i};\quad b_{n+i} = -\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_i}.$$

On aura :

$$(\mathrm{BA} - \mathrm{AB})\,\mathrm{R} = \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p}\left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right) - \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p} - \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}\right).$$

Mais d'après la définition des signes A et B :

$$\mathrm{BAR} = (\mathrm{N}, (\mathrm{M}, \mathrm{R})),\quad \mathrm{ABR} = (\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})),$$

$$\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right),\quad \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \left(\mathrm{M}, \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),$$

$$\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p} = \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\right).\quad \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p} = \left(\mathrm{M}, \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}\right).$$

D'où, en tenant compte des formules (1), (4_1) du § 16,

$$(\mathrm{N}, (\mathrm{M}, \mathrm{R})) - (\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R}))$$
$$= \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p} \left\{ \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}, \mathrm{M}\right) \right\} - \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \left\{ \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}, \mathrm{M}\right) \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p} \frac{\partial (\mathrm{N}, \mathrm{M})}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \frac{\partial (\mathrm{N}, \mathrm{M})}{\partial p} \right\} = ((\mathrm{N}, \mathrm{M}), \mathrm{R}).$$

On tire de là, en faisant passer tous les termes dans le second membre, au moyen de la formule (1) du § 16 :

$$(\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})) + (\mathrm{N}, (\mathrm{R}, \mathrm{M})) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0,$$

ce qui est le théorème fondamental de Jacobi.

Corollaire. Soient $\mathrm{M} = a$, $\mathrm{N} = b$ des solutions de l'équation :

$$(\mathrm{R}, z) = 0,$$

il résultera du théorème précédent que l'on a aussi, pour solution $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = c$. Car l'équation fondamentale donnera :

$$(\mathrm{M}, 0) + (\mathrm{N}, 0) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0,$$

ou

$$(\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0.$$

60. *Démonstration de Donkin* (*). « Si M, N, R sont des fonctions quelconques des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, on a :

$$(\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})) + (\mathrm{N}, (\mathrm{R}, \mathrm{M})) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Si l'on développe cette expression, il est évident que chacun de ses termes se compose du produit d'une dérivée du second ordre de l'une des fonctions M, N, R par des dérivées du premier ordre de chacune des deux autres fonctions.

(*) Nous empruntons cette citation textuelle de Donkin à Imschenetsky, p. 145. La démonstration de celui-ci repose sur l'emploi de la formule ($6'''$) du § précédent pour exprimer (M, (N, R)) (N, (R, M)), de la formule (4_1) pour exprimer (R, (M, N)). On ajoute les résultats trouvés, et on permute deux fois, circulairement, dans la nouvelle équation, les lettres M, N, R. On trouve le théorème de Jacobi, en ajoutant les trois dernières relations obtenues.

Considérons les termes contenant des dérivées du second ordre de M; ils seront de l'une des formes

$$\frac{\delta^2 M}{\delta x_i \delta p_j} \frac{\delta N}{\delta x_j} \frac{\delta R}{\delta p_i}, \quad \frac{\delta^2 M}{\delta x_i \delta x_j} \frac{\delta N}{\delta p_i} \frac{\delta R}{\delta p_j}, \quad \frac{\delta^2 M}{\delta p_i \delta p_j} \frac{\delta N}{\delta x_i} \frac{\delta R}{\delta x_j},$$

i pouvant être égal à j, et chacun d'eux proviendra du second ou du troisième terme de l'équation (e).

En examinant maintenant chacune de ces formes, il est aisé de voir que, à chaque terme provenant du second terme de l'équation (e), en correspond un semblable, *mais affecté d'un signe contraire,* provenant du troisième terme de cette équation; et comme la chose est vraie pour les termes où entrent les dérivées secondes de N et de R, il s'ensuit que le premier membre de l'équation (e) tout entier se réduit identiquement à zéro. Donc le théorème est démontré. »

§ 18. *Formes diverses des conditions d'intégrabilité d'une équation aux dérivées partielles* (*).

61. *Première forme des conditions d'intégrabilité* (**). Soit

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_1 \quad \ldots \ldots \quad (H_1)$$

une équation aux dérivées partielles à intégrer, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant comme plus haut les dérivées d'une fonction inconnue z, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a :

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Pour trouver une intégrale complète de l'équation donnée, il

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 2-17 et 30-32. Ce résumé se trouve également dans Imschenetsky, §§ 10-11, pp. 32-36; § 13, pp. 41-42; § 15, pp. 45-48; § 17, pp. 55-62; §§ 20-22, *passim;* Graindorge, III, pp. 15-30; IV, pp. 30-35; VII, *passim*. Nous croyons qu'il vaut mieux réunir tous les théorèmes du même genre, comme nous l'avons fait ici, que d'en mêler quelques-uns à la méthode d'intégration elle-même.

(**) Jacobi, *Nova meth.*, § 2. Nous ajoutons la forme (I').

suffira d'avoir, outre cette équation, $(n-1)$ autres relations de même forme, contenant chacune une constante arbitraire

$$H_2(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_2,\quad\ldots\ldots\quad (H_2)$$
$$H_3(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_3,\quad\ldots\ldots\quad (H_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_n(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_n,\quad\ldots\ldots\quad (H_n)$$

pourvu que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, déduites de ces équations (H),

$$p_1=\pi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad\ldots\ldots\quad (\pi_1)$$
$$p_2=\pi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad\ldots\ldots\quad (\pi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n=\pi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad\ldots\ldots\quad (\pi_n)$$

rendent dz intégrable. En effet, s'il en est ainsi, on pourra trouver, par une simple quadrature, une expression pour z, contenant, outre les $(n-1)$ constantes arbitraires $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, une $n^{ième}$ constante arbitraire provenant de l'intégration de dz. L'expression de z satisfera non-seulement à l'équation donnée, mais à tout le système H.

Les conditions d'intégrabilité de dz, sont, comme on le sait,

$$\frac{\delta p_i}{\delta x_k}=\frac{\delta p_k}{\delta x_i}\quad\text{ou}\quad\frac{\delta \pi_i}{\delta x_k}=\frac{\delta \pi_k}{\delta x_i},\quad\ldots\ldots\quad (I)$$

i et k recevant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$. On remarquera que ces conditions peuvent se mettre sous la forme

$$(p_i-\pi_i, p_k-\pi_k)=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad (I')$$

62. *Seconde forme des conditions d'intégrabilité* (*). On obtient cette seconde forme en remarquant que l'on a

$$[H_i, H_k]=(a_i, a_k)=0,$$

(*) Jacobi, *Nova meth.*, §§ 14-16. La relation qui conduit au théorème direct étant résolue par rapport à $\frac{\delta\pi_{i'}}{\delta x_{k'}}-\frac{\delta\pi_{k'}}{\delta x_{i'}}$ conduit au théorème réciproque. C'est ainsi que fait Jacobi dans le § 16, résumé par Graindorge, IV, pp. 30-35. Nous avons suivi Jacobi pour la démonstration du théorème direct, comme

et développant la première expression au moyen de la formule (6′) du § 16, où l'on fait

$$a_i = \pi_i, \quad \varphi = H_i, \quad \psi = H_k,$$

Il vient ainsi :

$$0 = (H_i, H_k) + \Sigma\Sigma \frac{\partial H_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial H_k}{\partial p_{k'}} \left(\frac{\partial \pi_{i'}}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial \pi_{k'}}{\partial x_{i'}} \right).$$

D'après les conditions (I), le second terme du second nombre est nul. Donc

$$(H_i, H_k) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Réciproquement les conditions (II) entraînent les relations (I). On a, en effet, identiquement :

$$p_i = \pi_i (x_1, \ldots, x_n, H_1, \ldots, H_n),$$
$$p_k = \pi_k (x_1, \ldots, x_n, H_1, \ldots, H_n).$$

IMSCHENETSKY, § 11, p. 33, et nous avons simplifié la démonstration donnée par ce dernier, n° 40, p. 55 pour le théorème inverse. Dans le § 14 de la *Nova methodus*, Jacobi donne une autre démonstration des formules (II), en se basant sur les formules (IV) données plus bas. Soient

$$p_1 = \psi_1 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n), p_2 = \psi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n).$$

Les relations

$$H_1 (x_1, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, p_3, \ldots, p_n) = a_1, H_2 (x_1, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, p_3, \ldots, p_n) = a_2,$$

seront des identités. On tire de là, pour $H = H_1$ ou $H = H_2$.

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial (p_2 - \psi_2)}{\partial x},$$

puisque p_1, p_2 ne contiennent pas x explicitement. On a de même,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial (p_2 - \psi_2)}{\partial p},$$

même pour $p = p_1$ ou $p = 2$. Il résulte immédiatement de ces formules

$$(H_1, H_2) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \frac{\partial H_2}{\partial p_1} \right) (p_1 - \psi_1, p_2 - \psi_2),$$

ce qui donne l'équation (II), quand l'équation (IV) existe. Cette démonstration nous semble peu naturelle, parce que les théorèmes (III) et (IV) sont plus compliqués que II, ou au moins conduisent à des équations moins symétriques. Il vaut mieux démontrer ces théorèmes II et IV, indépendamment les uns des autres.

Donc, d'après la formule (8″) du § 16,

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k}-\frac{\delta\pi_k}{\delta x_i}=-\Sigma\Sigma\left\{\frac{\delta\pi_i}{\delta H_{i'}}\frac{\delta\pi_k}{\delta H_{k'}}-\frac{\delta\pi_i}{\delta H_{k'}}\frac{\delta\pi_k}{\delta H_{i'}}\right\}(H_{i'},H_{k'})+(\pi_i,\pi_k).$$

Le premier terme du second membre est nul à cause des équations (2); le second est nul parce que π_i et π_k ne contiennent pas les p explicitement. Donc la relation précédente se réduit à

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k}-\frac{\delta\pi_k}{\delta x_i}=0,$$

c'est-à-dire, à la condition (I).

On arrive au même résultat, mais plus péniblement, au moyen de la formule (6′) du § 16 (*).

63. *Troisième forme des conditions d'intégrabilité* (**). Supposons que l'on déduise des relations (II) ou (π), les expressions suivantes des p :

$$p_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,a_1,p_2,p_3,\ldots,p_n)\,;\ \ldots\ldots\ (\varphi_1)$$
$$p_2=\varphi_2(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,p_3,\ldots,p_n),\ \ldots\ldots\ (\varphi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n=\varphi_n(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)=\pi_n.\ \ldots\ (\varphi_n)$$

de sorte que chaque p est fonction des $2n$ lettres qui le suivent dans la série

$$p_1,p_2,\ldots,p_n,x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n.$$

On aura identiquement :

$$p_i=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n,H_1,\ldots,H_i,\ p_{i+1},\ p_{i+2},\ldots,p_n),$$
$$p_k=\varphi_k(x_1,\ldots,x_n,H_1,\ldots,H_k,p_{k+1},p_{k+2},\ldots,p_n).$$

(*) Imschenetsky, n° 40, pp. 55-57.

(**) Jacobi, *Nova methodus*, §§ 3, 4, 5, théorème direct; § 6, énoncé général; §§ 7 et 8, théorème inverse, résumé par Graindorge, n°s 24-26, pp. 20-25. Imschenetsky donne le théorème direct sous une forme un peu différente de celle de Jacobi, n° 41, pp. 57-60 ; il évite la longue démonstration du théorème inverse, comme on le verra à propos des théorèmes (VI), (VII) et (VIII), en note. Jacobi, *Nova methodus*, §§ 9, 10, 11 s'occupe de la marche générale de l'intégration.

Donc, d'après la formule (8″) du § 16, rappelée plus haut :

$$\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta x_i} = (\varphi_i, \varphi_k), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

ou encore, comme il est facile de le voir,

$$(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III')}$$

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que les équations (III) ont pour conséquence les équations (I) ou (II). Pour le montrer, remarquons que l'on a identiquement.

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n) = \pi_1,$$
$$p_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \pi_3, \ldots, \pi_n) = \pi_2,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$p_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, \pi_n) = \pi_{n-1}.$$
$$p_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \pi_n.$$

Nous allons montrer au moyen de ces formules, par un calcul de proche en proche : 1° que l'on a :

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = 0.$$

2° que

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_k} = \frac{\delta \pi_k}{\delta x_i}.$$

Pour démontrer le premier point, nous remarquerons que l'on a :

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = \frac{d\varphi_i}{dx_n} - \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_i} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_i} + \left(\frac{\delta \varphi_i}{\delta \pi_{i+1}}\frac{\delta \pi_{i+1}}{\delta x_n} + \cdots + \frac{\delta \varphi_i}{\delta \pi_n}\frac{\delta \pi_n}{\delta x_n}\right).$$

Supposons que les relations (I) soient démontrées pour l'indice n, et les indices plus grands que i, on pourra remplacer

$$\frac{\delta \pi_{i+1}}{\delta x_n}, \ \frac{\delta \pi_{i+2}}{\delta x_n}, \ldots, \frac{\delta \pi_n}{\delta x_n};$$

par

$$\frac{\delta \pi_n}{\delta x_{i+1}}, \ \frac{\delta \pi_n}{\delta x_{i+2}}, \ldots, \frac{\delta \pi_n}{\delta x_n};$$

ou encore par

$$\frac{\delta \varphi_n}{\delta x_{i+1}}, \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_{i+2}}, \ldots, \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_n},$$

puisque est π_n est identique à φ_n. On aura donc, au lieu de la dernière égalité,

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_i} + (\varphi_n, \varphi_i),$$

c'est-à-dire, d'après (III),

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = 0.$$

Ainsi, la relation (I) subsiste pour l'indice n et l'indice i, si elle subsiste pour l'indice n, et les indices supérieurs à i. Or, elle est évidente pour les indices n et n, donc aussi, de proche en proche, pour les indices n et $(n-1)$, n et $(n-2)$, n et $(n-3)$, ..., n et 1.

Supposons maintenant, pour démontrer le second point, que la formule (I) subsiste pour les indices

$$k \text{ et } i+1, \quad k \text{ et } i+2, \ldots, k \text{ et } n,$$
$$k+1 \text{ et } i, \quad k+2 \text{ et } i, \ldots, n \text{ et } i,$$

je dis qu'elle subsiste aussi pour i et k, et, par suite, qu'elle est généralement vraie. En effet, on a

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta \pi_k}{\delta x_i} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta x_i} + \Sigma \left\{ \frac{\delta \varphi_i}{\delta \pi} \frac{\delta \pi}{\delta x_k} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta \pi} \frac{\delta \pi}{\delta x_i} \right\},$$

la somme s'étendant à toutes les dérivées de φ_i et de φ_k, ce qui n'a pas d'inconvénient puisque les dérivées de φ_i par rapport au π d'indice non supérieur à i, et de celles de φ_k, par rapport aux π d'indice non supérieur à k sont nulles. D'après l'hypothèse, on pourra remplacer

$$\frac{\delta \pi}{\delta x_k} \text{ par } \frac{\delta \pi_k}{\delta x}, \quad \frac{\delta \pi}{\delta x_i} \text{ par } \frac{\delta \pi_i}{\delta x}.$$

D'ailleurs, d'après (III), le premier terme du second membre

$$\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta x_i} = -\Sigma \left\{ \frac{\delta \varphi_i}{\delta p} \frac{\delta \varphi_k}{\delta x} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta p} \frac{\delta \varphi_i}{\delta x} \right\}.$$

Donc,

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k}-\frac{\delta\pi_k}{\delta x_i}=\Sigma\left\{\frac{\delta\varphi_i}{\delta\pi}\frac{\delta\pi_k}{\delta x}-\frac{\delta\varphi_k}{\delta\pi}\frac{\delta\pi_i}{\delta x}\right\}-\Sigma\left\{\frac{\delta\varphi_i}{\delta p}\frac{\delta\varphi_k}{\delta x}-\frac{\delta\varphi_k}{\delta p}\frac{\delta\varphi_i}{\delta x}\right\},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k}-\frac{\delta\pi_k}{\delta x_i}=\Sigma\left\{\frac{\delta\varphi_i}{\delta p}\frac{\delta(\pi_k-\varphi_k)}{\delta x}-\frac{\delta\varphi_k}{\delta p}\frac{\delta(\pi_i-\varphi_i)}{\delta x}\right\}=\Sigma\begin{vmatrix}\frac{\delta(\pi_i-\varphi_i)}{\delta x}, & \frac{\delta(\pi_k-\varphi_k)}{\delta x}\\ \frac{\delta(-\varphi_i)}{\delta p}, & \frac{\delta(-\varphi_k)}{\delta p}\end{vmatrix}.$$

On peut sans inconvénient, dans la dernière ligne, mettre $(\pi_i-\varphi_i)$, $(\pi_k-\varphi_k)$ au lieu de $(-\varphi_i)$, $(-\varphi_k)$ puisque π_i, π_k ne contiennent pas p. Donc

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k}-\frac{\delta\pi_k}{\delta x_i}=(\pi_i-\varphi_i,\ \pi_k-\varphi_k).$$

On peut transformer le second membre de cette équation d'une manière remarquable. On a, en effet, successivement, en désignant par $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ les valeurs de φ données plus haut et égales aux π, et reprenant l'avant-dernière expression de ce second membre :

$$(\pi_i-\varphi_i,\pi_k-\varphi_k)=-\Sigma\begin{vmatrix}\frac{d\varphi'_i}{dx}-\frac{\delta\varphi'_i}{\delta x}, & \frac{d\varphi'_k}{dx}-\frac{\delta\varphi'_k}{\delta x}\\ \frac{\delta\varphi'_i}{\delta p}, & \frac{\delta\varphi'_k}{\delta p}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi'_i}{\delta\pi_{i+1}}\frac{\delta\pi_{i+1}}{\delta x}+\dots+\frac{\delta\varphi'_i}{\delta\pi_n}\frac{\delta\pi_n}{\delta x}, & \frac{\delta\varphi'_k}{\delta\pi_{k+1}}\frac{\delta\varphi_{k+1}}{\delta x}+\dots+\frac{\delta\varphi'_k}{\delta\pi}\frac{\delta\pi_n}{\delta x}\\ \frac{\delta\varphi'_i}{\delta p}, & \frac{\delta\varphi'_k}{\delta p}\end{vmatrix}=$$

$$\Sigma_{i'}\Sigma_{k'}\frac{\delta\varphi'_{i'}}{\delta\pi_{i'}}\frac{\delta\varphi'_{k'}}{\delta\pi_{k'}}\left\{\frac{\delta\pi_{i'}}{\delta x_{k'}}-\frac{\delta\pi_{k'}}{\delta x_{i'}}\right\},$$

i' devant avoir les valeurs $(i+1), (i+2), \dots, n$, k' les valeurs $(k+1), (k+2), \dots, n$. Pour ces valeurs, on a, par hypothèse,

$$\frac{\delta\pi_{i'}}{\delta x_{k'}}-\frac{\delta\pi_{k'}}{\delta x_{i'}}=0.$$

Donc enfin

$$(\pi_i - \varphi_i, \pi_k - \varphi_k) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (\text{III}'')$$

et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i et de k.

64. *Quatrième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Si l'on substitue dans les $(m-1)$ premières équations φ, la valeur de p_m, déduite de la $m^{ième}$, puis la nouvelle valeur de p_{m-1} dans les $(m-2)$ premières et ainsi de suite, on arrivera à m relations de la forme :

$$p_1 = \psi_1 (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n), \ldots \quad (\psi_1)$$
$$p_2 = \psi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n), \ldots \quad (\psi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \psi_m (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \varphi_m \ldots \quad (\psi_3)$$

(*) Jacobi, *Nova meth*, § 13, donne le théorème direct comme nous l'indiquons dans le texte, la forme seule des formules étant différente; Graindorge a résumé cette démonstration, n° 27, pp. 25-29, Imschenetsky, n° 42, pp 60-62. Ni l'un ni l'autre ne s'occupent du théorème inverse. Jacobi, *Nova meth.*, § 12, donne en outre la remarquable démonstration suivante du théorème et de sa réciproque; elle est déduite du théorème (V) donné dans le numéro suivant, en faisant $(m+1) = k$. Posons :

$$p_i = \psi_i (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n) = \chi_i (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{k-1}, \varphi_k, p_{k+1}, \ldots, p_n),$$
$$p_k = \psi_k (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, p_{k+1}, \ldots, p_n) = \varphi_k (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k, p_{k+1}, \ldots, p_n).$$

On aura

$$\frac{\partial (p_i - \chi_i)}{\partial x} = \frac{\partial (p_i - \psi_i)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \varphi_k)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (p_i - \chi_i)}{\partial p} = \frac{\partial (p_i - \psi_i)}{\partial p} + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \varphi_k)}{\partial p}.$$

D'où

$$(p_i - \chi_i, p_k - \varphi_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \varphi_k) + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} (p_k - \varphi_k, p_k - \varphi_k),$$

c'est-à-dire simplement :

$$(p_i - \chi_i, p_k - \varphi_k) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (\text{IV}''')$$

Jacobi fait très-bien remarquer que p_i et p_k peuvent représenter deux p quelconques, parce que dans les formules (V), on peut remplacer $(m+1)$ par un indice quelconque. Le théorème que nous démontrons ici en note est donc plus général que les théorèmes (III), (IV), (V). Jacobi ne démontre pas la réciproque de (IV), mais (IV''') entraîne (V) qui a pour conséquence (III) et par suite (II) et (I).

On démontre, absolument comme au numéro précédent, que les équations (I) (II) entraînent les suivantes et réciproquement :

$$\frac{\delta\psi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta\psi_k}{\delta x_i} = (\psi_i, \psi_k), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

$$(p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV')}$$

$$(\pi_i - \psi_i, \pi_k - \psi_k) = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV'')}$$

i et k sont supposés tout au plus égaux à m.

65. *Cinquième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Considérons les conditions d'intégrabilité sous la forme (III), pour les indices 1, 2, ... m et $(m+1)$:

$$\begin{array}{rcl}
(p_1 - \varphi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_1 = 0, \\
(p_2 - \varphi_2, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
(p_{m-1} - \varphi_{m-1}, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_{m-1} = 0, \\
(p_m - \varphi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_m = 0,
\end{array}$$

et voyons, ce qu'elles deviennent quand on y introduit les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, à la place de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, par les substitutions indiquées au commencement du n° précédent. Je dis qu'elles se transforment dans les suivantes :

$$\left.\begin{array}{rcl}
(p_1 - \psi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_1 = 0, \\
(p_2 - \psi_2, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
(p_{m-1} - \psi_{m-1}, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_{m-1} = 0, \\
(p_m - \psi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_m = 0.
\end{array}\right\} \ldots \text{(V)}$$

La chose est évidente pour la dernière puisque $\psi_m = \varphi_m$. Pour déduire $\Psi_{m-1} = 0$ de $\Phi_{m-1} = 0$, remarquons que l'on a :

$$\psi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \psi_m, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

(*) JACOBI, *Nova methodus*, §§ 9-11, IMSCHENETSKY, n° 71, pp. 93-94 ; GRAINDORGE, n° 27, pp. 25-29.

Par conséquent :

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta x}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta x}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta\psi_m}\,\frac{\delta\psi_m}{\delta x},$$

ou

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta x}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta x}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}\,\frac{\delta\varphi_m}{\delta x},$$

On a aussi, pour tous les p, p_{m-1} et p_m non exceptés :

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta p}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}\,\frac{\delta\varphi_m}{\delta p}.$$

Il résulte de là que

$$(p_{m-1}-\psi_{m-1},\, p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

$$=(p_{m-1}-\varphi_{m-1},\, p_{m+1}-\varphi_{m+1})+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}(\varphi_m,\, p_{m+1}-\varphi_{m+1}),$$

ou plus simplement :

$$\Psi_{m-1}=\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-1}}{\delta p_m}\Phi_m.$$

On démontre de la même manière que :

$$\Psi_{m-2}=\Phi_{m-2}+\frac{\delta\varphi_{m-2}}{\delta p_{m-1}}\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-2}}{\delta p_m}\Phi_m,$$

$$\Psi_{m-3}=\Phi_{m-3}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_{m-2}}\Phi_{m-2}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_{m-1}}\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_m}\Phi_m;$$

. . . .

$$\Psi_1=\Phi_1+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_2}\Phi_2+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_3}\Phi_3+\cdots+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_m}\Phi_m.$$

Ces relations entre les Ψ et les Φ prouvent que les équations (V) sont une conséquence des équations (III) correspondantes et réciproquement.

66. *Sixième, septième et huitième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Les équations φ peuvent être supposées mises sous la forme suivante :

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n)=\mathrm{H}_1=a_1, \quad \ldots\ldots \quad (f_1)$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_n,a_1,p_2,p_3,\ldots,p_n)=a_2, \quad \ldots\ldots \quad (f_2)$$

$$f_3(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,p_3,\ldots,p_n)=a_3, \quad \ldots\ldots \quad (f_3)$$

. . . .

$$f_n(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},p_n)=a_n \quad \ldots\ldots \quad (f_n)$$

En remplaçant p_k par sa valeur $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_k,p_{k+1},\ldots,p_n)$ dans f_k, on aura l'identité

$$f_k(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_k,\varphi_k,p_{k+1},\ldots p_n)=a_k.$$

On en déduit, en dérivant par rapport à l'un des x ou des p,

$$\frac{\delta f_k}{\delta x}=-\frac{\delta f_k}{\delta\varphi_k}\frac{\delta\varphi_k}{\delta x}=\frac{\delta f_k}{\delta p_k}\cdot\frac{\delta(p_k-\varphi_k)}{\delta x},$$

$$\frac{\delta f_k}{\delta p}=-\frac{\delta f_k}{\delta\varphi_k}\frac{\delta\varphi_k}{\delta p}=\frac{\delta f_k}{\delta p_k}\cdot\frac{\delta(p_k-\varphi_k)}{\delta p}.$$

(*) Jacobi, *Nova methodus*, §§ 30-32. Jacobi ajoute cette remarque : Si l'on remplace dans (f_i, f_k), a_p par f_p soit dans l'une, soit dans l'autre, p étant plus petit que le plus grand des nombres i et k, on aura, en appelant f_i' et f_k' les nouvelles fonctions, d'après la formule (6) du § 16,

$$[f_i',f_k']=(f_i',f_k')+\frac{\partial f_i'}{\partial a_p}(f_p,f_k')+\frac{\partial f_k'}{\partial a_p}(f_i',f_p)+\frac{\partial f_i'}{\partial a_p}\frac{\partial f_k'}{\partial a_p}(f_p,f_p).$$

On conclut de là que le théorème VIII reste vrai quand on remplace une constante a_p par sa valeur f_p, par la méthode de proche en proche; d'où en éliminant ainsi successivement toutes les constantes, on retombe sur $(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k)=0$. Imschenetsky donne les théorèmes directs, n° 73, pp. 95-96; n° 84, pp. 111-112; la réciproque, en substituant H_p à a_p, n° 85, pp. 112-113; il indique la démonstration de Jacobi, n° 86, p. 113. Graindorge donne le théorème (VI) ou (VII), n° 52, pp. 53-55, et ne s'occupe pas du théorème réciproque.

Sous la seconde forme, la dernière formule subsiste même pour $p = p_k$. On a, d'après ces relations :

$$(p_i - \varphi_i, f_k) = \frac{\delta f_k}{\delta p_k}(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k),$$

$$(p_i - \psi_i, f_{m+1}) = \frac{\delta f_{m+1}}{\delta p_{m+1}}(p_i - \psi_i, p_{m+1} - \varphi_{m+1}),$$

$$(f_i, f_k) = \frac{\delta f_i}{\delta p_i}\frac{\delta f_k}{\delta p_k}(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k).$$

Donc, d'après les formules (III) et (V)

$$(p_i - \varphi_i, f_k) = 0, \quad \dots \dots \dots \dots \quad \text{(VI)}$$

$$(p_i - \psi_i, f_k) = 0, \quad \dots \dots \dots \dots \quad \text{(VII)}$$

$$(f_i, f_k) = 0. \quad \dots \dots \dots \dots \quad \text{(VIII)}$$

Il est clair que, réciproquement, les équations (VI), (VII), (VIII) entraînent (III) et (V) et par suite (I).

Remarque. Nous avons ainsi quatre systèmes de conditions d'intégrabilité : 1° Le système primitif (I); 2° le système (II); 3° le système (III) ou les équivalents (VI) et (VIII); 4° un système composé des équations (IV), des équations (V) ou (VII), puis des équations (III) nécessaires pour avoir autant de conditions que dans le système (I). Toutes ces conditions d'intégrabilité ont une forme éminemment simple que l'on peut représenter par

$$(M, N) = 0.$$

M, N étant deux des fonctions π, ou H, ou φ, ou ψ, ou ψ et φ, ou φ et f, ou ψ et f, ou f.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

—

§ 19. *Méthode de Jacobi quand les équations cherchées sont résolues par rapport aux constantes* (*).

67. *Idée générale de la marche à suivre dans l'intégration des systèmes* (II). L'intégration d'une équation aux dérivées partielles

$$H_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_1,$$

revient, comme on l'a dit plus haut, à trouver $(n-1)$ relations semblables :

$$H_2 = a_2, \quad H_3 = a_3, \ldots, H_n = a_n,$$

d'où l'on puisse tirer des valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, telles que $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ soit immédiatement intégrable. Pour cela il suffit de trouver les intégrables des équations (II) du § 18, que nous écrirons comme suit :

$$(H_2, H_1) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
$$(H_3, H_1) = 0, \quad (H_3, H_2) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$
$$(H_4, H_1) = 0, \quad (H_4, H_2) = 0, \quad (H_4, H_3) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(H_{n-1}, H_1) = 0, (H_{n-1}, H_2) = 0, \ldots, (H_{n-1}, H_{n-2}) = 0, \quad \ldots \quad (n-2)$$
$$(H_n, H_1) = 0, \quad (H_n, H_2) = 0, \ldots, \quad (H_n, H_{n-1}) = 0 \quad \ldots \quad (n-1)$$

(*) Il suffirait peut-être, dans l'exposition de la méthode de Jacobi, de se borner à ce qui est donné dans le paragraphe suivant, comme a fait Jacobi lui-même. Mais au point de vue didactique, il vaut mieux faire connaître d'abord la méthode du grand géomètre sous une forme plus symétrique, et qui peut d'ailleurs être utile en pratique, quand on ne sait pas résoudre les équations (H). Comparez à ce paragraphe, Imschenetsky, § 18, pp. 63-72, à qui il est emprunté presque en entier, et Graindorge, VI, pp. 42-50.

Il est clair qu'une solution $H_2 = a_2$ du système (1) satisfait au système (2) d'après la définition de celui-ci, puisque la fonction H_2 entre précisément dans l'équation (2_2). Donc, après avoir trouvé H_2, il faudra trouver une autre solution $H_3 = a_3$ du système (2). A cause de la définition de l'équation (3_3), H_2 et H_3 satisfont au système (3); il faudra en chercher une autre solution H_4, afin de pouvoir former l'équation (4_4) $(H_5, H_4) = 0$, et ainsi de suite.

En résumé, chaque système (i) est identique au suivant, sauf qu'il contient en moins une équation $(H_{i+2}, H_{i+1}) = 0$, où H_{i+1} est la fonction qui satisfait à toutes les équations (i); il faut trouver une nouvelle solution du système (i) qui satisfasse, en outre, à $(H_{i+2}, H_{i+1}) = 0$.

68. *Intégration de l'équation* (1) *et du système* (2). L'équation (1) est linéaire par rapport aux dérivées de H_2, considéré comme fonction des p et des x :

$$\frac{\delta H_2}{\delta x_1}\frac{\delta H_1}{\delta p_1} + \cdots + \frac{\delta H_2}{\delta x_n}\frac{\delta H_1}{\delta p_n} - \frac{\delta H_2}{\delta p_1}\frac{\delta H_1}{\delta x_1} - \cdots - \frac{\delta H_2}{\delta p_n}\frac{\delta H_1}{\delta x_n} = 0. \quad . \quad (1)$$

Pour trouver l'intégrale $H_2 = a_2$, il suffira de connaître une solution de système correspondant (n° 32), à $(2n - 1)$ variables dépendantes, ou d'ordre $(2n - 1)$:

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta H_1}{\delta p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\delta H_1}{\delta p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\delta H_1}{\delta p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\delta H_1}{\delta x_1}} = \frac{-dp_2}{\frac{\delta H_1}{\delta x_2}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\delta H_1}{\delta x_n}} \cdot (a)$$

Une fois H_2 trouvé, on pourra former le système (2)

$$(H_3, H_1) = 0, \quad (H_3, H_2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Pour en trouver une intégrale H_3, on cherchera d'abord une solution θ_1 autre que H_2, de (2_1) ou (1), c'est-à-dire, une nouvelle solution du système auxiliaire dont nous venons de parler, de sorte que l'on aura

$$(\theta_1, H_1) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$

Cela fait, on calculera les expressions suivantes :

$$\theta_2 = (\theta_1, H_2), \quad \theta_3 = (\theta_2, H_2), \quad \theta_4 = (\theta_3, H_2), \ldots,$$

c'est-à-dire que l'on vérifiera si θ_1, θ_2, θ_3, ne sont pas des solutions de (2_2). Je dis maintenant que l'on aura les cinq propositions suivantes :

I. Les fonctions θ_2, θ_3, θ_4, etc., satisfont toutes à l'équation (2_1), c'est-à-dire que

$$(\theta_2, H_1) = 0, \quad (\theta_3, H_1) = 0, \quad (\theta_4, H_1) = 0, \ldots$$

En effet, d'après le théorème fondamental de Jacobi :

$$(H_1, \theta_2) = (H_1, (\theta_1, H_2)) = -(\theta_1, (H_2, H_1)) - (H_2, (H_1, \theta_1)).$$

Le second membre de cette égalité d'après (1) et (1') se réduit à

$$-(\theta_1, 0) - (H_2, 0),$$

qui est nul. La même démonstration se fait pour θ_3, θ_4, etc.

II. Toute fonction $\Theta(H_1, H_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ des solutions antérieures de (1) ou de (2_1) est une solution de cette équation. On aura, en effet :

$$(\Theta, H_1) = (H_1, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial H_1} + (H_2, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial H_2} + (\theta_1, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_i},$$

équation qui se réduit à

$$(\Theta, H_1) = 0.$$

III. En cherchant, par le procédé indiqué plus haut, des solutions H_2, θ_1, θ_2, θ_3, ..., de l'équation (1), on arrivera, à la fin, à une solution

$$\theta_{i+1} = (\theta_i, H_2),$$

qui sera une fonction Θ des précédentes, et il en sera de même de toutes les suivantes. Les équations (a), en effet, ne peuvent avoir

que $(2n-1)$ solutions distinctes; donc la suite $H_2, \theta_1, \theta_2, \ldots$, contient au plus $(2n-1)$ fonctions, et l'on a

$$\theta_{i+1} = \Theta(H_1, H_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i),$$

pour $i = (2n-2)$, ou $i < (2n-2)$. La formule

$$\theta_{i+2} = (\Theta, H_2) = (H_1, H_2)\frac{\delta\Theta}{\delta H_1} + (H_2, H_2)\frac{\delta\Theta}{\delta H_2} + (\theta_1, H_2)\frac{\delta\Theta}{\delta\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_2)\frac{\delta\Theta}{\delta\theta_i}$$

prouve d'ailleurs que la fonction suivante s'exprime de même, et cette conclusion s'applique à $\theta_{i+3}, \theta_{i+4}$, etc.

IV. On peut déterminer une fonction des solutions $H_1, H_2, \theta_1, \ldots, \theta_i$, de (2_1) qui satisfasse en même temps à (2_2). Soit θ cette fonction, on posera $(\theta, H_2) = 0$, ou

$$(\theta_1, H_2)\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1} + (\theta_2, H_2)\frac{\delta\theta}{\delta\theta_2} + \cdots + (\theta_i, H_2)\frac{\delta\theta}{\delta\theta_i} = 0,$$

ou encore,

$$\theta_2\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1} + \theta_3\frac{\delta\theta}{\delta\theta_2} + \cdots + \theta_i\frac{\delta\theta}{\delta\theta_{i-1}} + \theta_{i+1}\frac{\delta\theta}{\delta\theta_i} = 0,$$

dont l'intégration dépend de la recherche d'une intégrale du système

$$\frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \cdots = \frac{d\theta_{i-1}}{\theta_i} = \frac{d\theta_i}{\theta_{i+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Ce système devient, en introduisant une variable auxiliaire t dont la différentielle dt est égale à chacun des rapports précédents :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \theta_3, \ldots, \frac{d\theta_i}{dt} = \Theta(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i).$$

On en tire l'équation :

$$\frac{d^i\theta_1}{dt^i} = \Theta\left(a_1, a_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dt^{i-1}}\right).$$

Si l'on connaît une intégrale première de celle-ci :

$$H_3\left(a_1, a_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dt^{i-1}}\right) = a_3,$$

on pourra écrire cette intégrale sous la forme :

$$H_3(H_1, H_2, \theta_1, \dots, \theta_i) = a_3,$$

et ce sera la solution cherchée.

Remarques I. L'intégration de l'équation (1) exige la recherche d'une solution du système (a), d'ordre ($2n-1$); l'intégration de (2), la recherche d'une solution autre du système (a), d'ordre ($2n-1$), et d'un autre d'ordre ($i-1$), c'est-à-dire d'ordre ($2n-3$), au plus, ou d'ordre ($2n-2$), si l'on introduit une variable t auxiliaire.

II. Les solutions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, de ($2_1$) donnent aussi autant de solutions du système (a), sauf si elles rentrent les unes dans les autres. C'est dans cette remarque que consiste le *théorème de Poisson*. Bertrand a remarqué que ce théorème est souvent illusoire, quand on veut l'appliquer à la recherche de nouvelle solution d'équations de la forme (a). Cela arrive si $\theta_2, \theta_3, \dots$, sont identiquement nuls. Mais, quand il s'agit de l'intégration des équations aux dérivées partielles, c'est là précisément le cas le plus favorable (voir n° 71, 1°). C'est là ce qui rend l'étude des systèmes canoniques de la forme (a) plus difficile que celle des équations aux dérivées partielles correspondantes.

69. *Intégration du système* (3) *et des autres systèmes.* On cherche une seconde intégrale θ_1 du système (2) ou de (3_1), (3_2). On forme les expressions suivantes :

$$\theta_2 = (\theta_1, H_3), \quad \theta_3 = (\theta_2, H_3), \quad \theta_4 = (\theta_3, H_3), \dots,$$

c'est-à-dire que l'on vérifie si $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, ne sont pas des solutions de (3_3). Ces fonctions $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$ seront des solutions communes de (3_1), (3_2). En effet, on aura pour la fonction θ_2, par exemple :

$$(H_1, \theta_2) = (H_1, (\theta_1, H_3)) = -(\theta_1, (H_3, H_1)) - (H_3, (H_1, \theta_1)),$$
$$(H_2, \theta_2) = (H_2, (\theta_1, H_3)) = -(\theta_1, (H_3, H_2)) - (H_3, (H_2, \theta_1)).$$

Les seconds membres de ces relations sont nuls, en vertu des équations (2), ou des équations :

$$(H_1, \theta_1) = 0, \quad (H_2, \theta_1) = 0, \quad \dots \dots \dots \quad (2')$$

qui expriment que θ_1 est une solution de (2).

La suite $\theta_1, \theta_2, \ldots$, dans le cas actuel comprendra au plus $(2n-4)$ fonctions distinctes, parce que, d'après le numéro précédent, à cause du système (b), qui ne peut avoir au plus que $(2n-3)$ solutions distinctes, il ne peut y avoir non plus que $(2n-3)$ solutions distinctes $H_3, \theta_1, \theta_2, \ldots$, de (2).

On trouvera, comme dans le numéro précédent, qu'il suffit de connaître une solution de l'équation :

$$(\theta_1, H_3)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_3)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

ou

$$\theta_2\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \cdots + \theta_{i+1}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

ou, enfin, du système

$$\frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \cdots = \frac{d\theta_i}{\theta_{i+1}} \quad \ldots\ldots\ldots (b')$$

θ_{i+1} étant une fonction de $H_1, H_2, H_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_i$, pour connaître la solution cherchée $H_4 = a_4$ du système (4).

Et ainsi de suite pour les systèmes successifs.

70. Remarques I. Le système (3) exige d'abord, pour trouver θ_1, comme dans le cas précédent que l'on trouve une solution du système (a) d'ordre $(2n-1)$, et une solution du système (b) au plus d'ordre $(2n-3)$; ensuite pour déterminer H_4, une solution du système (b'), au plus d'ordre $(2n-5)$.

II. En continuant, on verra sans peine qu'en résumé, l'intégration de

(1) exige l'intégration d'un système d'ordre $2n-1$, savoir le système (a),				
(2)	»	»	»	$2n-1$, 1 d'ordre $2n-3$,
(3)	»	»	»	$2n-1$, 1 » $2n-3$, 1 d'ordre $2n-5$,

. . . .

. . . .

$(n-1)$ exige l'intégration d'un système d'ordre $2n-1$, 1 d'ordre $2n-3$, . . . , 1 d'ordre 3, 1 équation d'ordre 1.

En tout, il faudra donc chercher, au plus,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{1.2} \text{ intégrales.}$$

En particulier il faudra chercher $(n-1)$ intégrales du système (a); puis, au plus, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ intégrales des systèmes auxiliaires (b), (b') qui sont beaucoup plus simples.

En apparence, la méthode de Jacobi exige plus d'intégrations que celles de Lagrange et de Pfaff, puisque, dans celles-ci, il suffit, en général, d'intégrer complétement l'équation (a), en prenant pour constantes les valeurs initiales des variables. Mais la méthode de Jacobi laisse une grande liberté dans les calculs, puisque l'on peut les commencer, à partir de chaque système auxiliaire, par n'importe quelle des solutions, et l'ordre de ces systèmes peut s'abaisser considérablement dans les cas particuliers. On verra, en outre, dans le paragraphe suivant, qu'elle peut encore être simplifiée.

III. On peut combiner la méthode de Jacobi avec celle de Cauchy, comme on le verra au n° 125, c'est-à-dire se servir du théorème fondamental de Jacobi, ou plutôt de celui de Poisson, pour trouver, dans certains cas, d'une manière simple, les intégrales du système (a), quand on en connaît quelques-unes. C'est le mode d'intégration le plus avantageux si la suite des fonctions θ est complète. Dans ce cas, connaissant $(2n-1)$ solution de (a), le mieux est d'abandonner la méthode de Jacobi. Cette remarque est due à Lie (*).

71. *Simplifications et modifications.* 1° Il peut arriver que l'une des fonctions θ, que l'on cherche soit *nulle;* alors le θ précédent est la solution cherchée. Ainsi, par exemple, si l'on a :

$$\theta_r = (\theta_{r-1}, H_3) = 0,$$

θ_{r-1} étant déjà une solution des deux autres équations du système (3), de manière que

$$(\theta_{r-1}, H_1) = 0, \quad (\theta_{r-1}, H_2) = 0,$$

il est clair que θ_{r-1} est la solution de tout le système (3).

(*) Lie, Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 23, pp. 488-489.

2° Si l'une des fonctions θ est une *constante*, les calculs s'achèvent immédiatement. Ainsi, par exemple, si

$$\theta_r = (\theta_{r-1}, H_3) = m,$$

l'équation auxiliaire (b') devient :

$$\frac{d\theta_{r-2}}{\theta_{r-1}} = \frac{d\theta_{r-1}}{m},$$

qui est intégrable.

3° Toutefois si $r=2$, la méthode devient illusoire; la fonction appelée plus haut θ est alors déterminée par l'équation

$$\theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_1} = 0,$$

qui donne pour θ une simple constante.

Dans ce cas, on partira d'une autre intégrale de l'équation (a) ou (b), et la même circonstance ne se présentera plus, ou bien, on trouvera immédiatement la solution. Si l'on a, en effet, pour deux solutions différentes θ_1, θ'_1 de (5_1), (5_2)

$$(\theta_1, H_3) = m, \quad (\theta'_1, H_3) = m',$$

on prendra pour solution commune à (5_1), (5_2), (5_3), une fonction θ de θ_1, θ'_1. On devra avoir :

$$\big(H_1, \theta(\theta_1, \theta'_1)\big) = 0, \quad \big(H_2, \theta(\theta_1, \theta'_1)\big) = 0, \quad \big(H_3, \theta(\theta_1, \theta'_1)\big) = 0.$$

Les deux premières sont identiquement satisfaites, l'autre devient

$$(H_3, \theta_1)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + (H_3, \theta'_1)\frac{\partial\theta}{\partial\theta'_1} = 0,$$

que l'on saura toujours intégrer.

72. *Cas plus général de simplification. Séparation des variables* (*). I. Supposons l'équation donnée de la forme :

$$H_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = a_1,$$

(*) Nous résumons le plus brièvement possible, IMSCHENETSKY, § 19, pp. 73-79.

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ désignent des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, telles que l'on ait, pour les valeurs de r et s comprises dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m$,

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0.$$

Si l'on parvient à trouver des fonctions H, contenant les quantités x, les quantités p et les fonctions φ, et telles que l'on ait

$$(\mathrm{H}_i, \varphi_r) = 0,$$
$$(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k) = 0,$$

en supposant, que dans ces fonctions H les fonctions φ soient remplacées par des constantes, je dis que l'on aura aussi

$$[\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k] = 0,$$

dans le cas où on laisse les fonctions φ dans les fonctions H.

En effet, la formule (6') du § 16, donne

$$[\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_k] = (\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k) + \Sigma \left\{ (\mathrm{H}_i, \varphi_r) \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \varphi_r} - (\mathrm{H}_k, \varphi_r) \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial \varphi_r} \right\}$$
$$+ \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \varphi_r} \right\} (\varphi_r, \varphi_s),$$

ou

$$[\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k] = 0.$$

Cette remarque simplifie beaucoup la recherche des fonctions H. Ainsi, en particulier, si l'on a :

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0,$$
$$(\mathrm{H}_1, \varphi_r) = 0,$$

pour trouver les fonctions $\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \ldots, \mathrm{H}_{m+1}$, il suffira de poser :

$$\mathrm{H}_2 = \varphi_1, \quad \mathrm{H}_3 = \varphi_2, \ldots, \mathrm{H}_{m+1} = \varphi_m,$$

ou même :

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{F}_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \ldots, \mathrm{H}_{m+1} = \mathrm{F}_m(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m),$$

pourvu que les fonctions F soient indépendantes les unes des autres. Nous supposons naturellement $m < n$.

II. Un cas remarquable, où il est facile de trouver des fonctions φ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut, est celui où *les variables sont dites séparées.* Nous prendrons un cas particulier pour nous faire comprendre. Supposons une équation aux dérivées partielles :

$$H_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, \varphi, \psi, \chi) = a_1,$$

où

$$\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_j, q_1, q_2, \ldots, q_j),$$
$$\psi = \psi(t_1, \ldots, t_k, r_1, r_2, \ldots, r_k),$$
$$\chi = \chi(u_1, \ldots, u_l, s_1, s_2, \ldots, s_l),$$
$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{dz}{dt}, \quad s = \frac{dz}{du},$$

de sorte que H_1, φ, ψ, χ contiennent toutes des variables indépendantes différentes.

Il est clair que l'on aura.

$$(H_1, \varphi) = 0, \quad (H_1, \psi) = 0, \quad (H_1, \chi) = 0,$$
$$(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \chi) = 0, \quad (\psi, \chi) = 0.$$

Par suite, on pourra poser

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \varphi = a_2, \quad H_3 = \psi = a_3, \quad H_4 = \chi = a_4.$$

Appelons z_1, z_2, z_3, z_4 les intégrales de ces quatre équations qui pourront se chercher indépendamment les unes des autres. La solution complète de l'équation donnée sera

$$z = \alpha + z_1 + z_2 + z_3 + z_4.$$

En effet, en premier lieu, on déduira de là, précisément les mêmes valeurs pour les p, les q, les r, les s que de z_1, z_2, z_3, z_4; ensuite le nombre des constantes arbitraires sera $(n + j + k + l)$. Car dans z_1 entrent $(n-1)$ constantes arbitraires, dans z_2, $(j-1)$ et en outre a_2, dans z_3, $(k-1)$ et en outre a_3, dans z_4, $(l-1)$ et en outre dans a_4. Donc, en comptant encore la constante α, il y aura $(n + j + k + l)$ constantes arbitraires.

III. Ces précieuses remarques nous permettent de traiter systématiquement quelques cas remarquables, déjà étudiés par la méthode de Lagrange (§ 8, n° 54), qui, au reste, conduit au résultat général que nous venons d'exposer :

1° L'équation

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

a pour intégrale

$$z = \alpha + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

les constantes arbitraires a satisfaisant à l'équation

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

On ramène à ce cas celui où l'équation est de la forme

$$z = f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

au moyen de la transformation du n° 2. En particulier, si z est une fonction homogène des quantités p de degré μ, il vient

$$z = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^{\frac{1}{\mu-1}}}.$$

2° L'équation

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

où φ_i ne contient que x_i et p_i, a pour intégrale :

$$z = \alpha + \int \psi_1 dx_1 + \int \psi_2 dx_2 + \cdots + \int \psi_n dx_n,$$

ψ_i étant la valeur de p_i déduite de $\varphi_i = a_i$ et les constantes a étant liées par la relation

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

3° L'équation

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

où f est une fonction homogène de degré μ, par rapport aux p, devient, en appelant $u = 0$ la solution complète et posant :

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} = q_1, \ldots, \frac{\delta u}{\delta x_n} = q_n, \quad \frac{\delta u}{\delta z} = q_{n+1},$$

$$z q_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

où la variable z est séparée des autres. Il suffira donc d'intégrer à part

$$zq_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu} \mathrm{A}, \quad f = \mathrm{A}.$$

Si l'intégrale de la dernière est

$$z_1 = \alpha_1 + \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{A}, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),$$

on trouve aisément que celle de l'équation donnée est

$$\mathrm{A}z^{\mu-1} = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\mathrm{F}\right)^{\mu}.$$

73. Exemples. I. Soit l'équation (*)

$$x_1x_2 \ldots x_n = p_1p_2 \ldots p_n.$$

Les variables peuvent être séparées, si l'on pose $x_i\varphi_i = p_i$, ce qui transforme l'équation en

$$\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n = 1.$$

On posera :

$$2^n a_1 a_2 \ldots a_n = 1,$$

$$\frac{p_1}{x_1} = 2a_1, \quad \frac{p_2}{x_2} = 2a_2, \ldots, \frac{p_n}{x_n} = 2a_n.$$

ce qui conduira aux solutions auxiliaires :

$$z_1 = \alpha_1 + a_1x_1^2, \ldots, z_n = \alpha_n + a_nx_n^2,$$

et par suite à la solution complète

$$z = \alpha + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2.$$

II. Soit encore l'équation (**)

$$(x_2p_1 + x_1p_2)\,x_3 + p_3\,(p_1 - p_2)\left[p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6)\,p_6\right] = a_1.$$

(*) C'est l'équation étudiée, plus bas, par la méthode de Cauchy (n° 110). Graindorge, n°s 49 et 69, intègre cette équation par la méthode générale de Jacobi sous ses deux formes.

(**) Nous empruntons cet exemple, si bien choisi pour montrer toutes les simplifications et toutes les modifications de la méthode de Jacobi, à Imschenetsky, n°s 61-65, pp. 79-86.

On posera, à cause de la séparation des variables x_1, x_2, x_3, et x_4, x_5, x_6,

$$p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6)p_6 = \alpha.$$

On trouvera, encore par séparation des variables, après avoir posé $p_5 = \beta$, l'intégrale de celle-ci sans aucune difficulté :

$$z' + A' = \frac{2}{3\gamma}(\alpha - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x_5 + \mathrm{l.}(\beta + x_6)^{\gamma}.$$

L'équation donnée deviendra alors :

$$H_1 = (x_2 p_1 + x_1 p_2)x_3 + \alpha p_3(p_1 - p_2) = a_1.$$

La fonction H_2, d'après la méthode générale de Jacobi, sera une solution des équations auxiliaires (a) qui deviennent dans le cas actuel :

$$\frac{dp_1}{p_2 x_3} = \frac{dp_2}{p_1 x_3} = \frac{dp_3}{p_1 x_2 + p_2 x_1} = \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)} \,.\, (a)$$

On déduit de là,

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = \frac{-d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

d'où, pour H_2, la valeur

$$H_2 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

Il faut maintenant trouver une solution commune aux équations :

$$(H_3, H_1) = 0, \quad (H_3, H_2) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2)$$

Pour cela, il faut chercher une seconde solution θ_1 des équations (a), et la substituer dans (2_2). On tire de la première équation :

$$\frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{p_1},$$

et par suite

$$\theta_1 = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}.$$

Formons la quantité $\theta_2 = (\theta_1, H_2)$. On trouve :

$$\theta_2 = (\theta_1, H_2) = (p_1 + p_2)(-p_1) + (p_1 + p_2) p_2 = -p_1^2 + p_2^2 = -2\theta_1,$$

c'est-à-dire que nous rencontrons le cas d'exception signalé plus haut (nº 68, Rem. II). On est donc forcé de chercher une autre intégrale du système (a). On trouve encore, au moyen des équations (a)

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{-x_3(p_1 - p_2)} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)},$$

l'intégrale :

$$\theta_1' = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Formons $\theta_2' = (\theta_1', H_2)$. Il vient :

$$\theta_2' = (p_1 + p_2)(-\alpha) + (p_1 + p_2)\alpha = 0.$$

Nous rencontrons précisément le cas où la simplification est la plus grande, c'est-à-dire, celui où une solution de (2_1) satisfait aussi à (2_2). Nous poserons donc :

$$H_3 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Les équations $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, $H_3 = a_3$, permettent de calculer $dz'' = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$, et par suite z''. On trouve ainsi :

$$z'' + A'' = \frac{a_2}{2} \, \mathrm{l.}\,(x_1 + x_2) + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_3 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a_1 \sqrt{2}}{\sqrt{a_3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_3}{\sqrt{2a_3}} - \frac{a_2}{2} \, \mathrm{l.}\,(2a_3 + x_3^2).$$

Donc enfin, en réunissant z' et z'', la valeur de z, avec 6 constantes α, β, γ, A, a_2, a_3, est la suivante :

$$z + A = \mathrm{l.}\, \frac{(x_1 + x_2)^{\frac{a_2}{2}} (\beta + x_6)^{\gamma}}{(2a_3 + x_3^2)^{\frac{a_2}{2}}} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_3 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a_1 \sqrt{2}}{\sqrt{a_3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_3}{\sqrt{2a_3}} + \frac{2}{3\gamma}(\alpha - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x^5.$$

Nous pouvons encore, avec Imschenetsky, arriver à la même intégrale complète, en cherchant une solution commune du système (2), à partir d'une solution de (2_2), ou du système correspondant qui n'est que du troisième ordre :

$$\frac{dp_1}{p_1+p_2}=\frac{dp_2}{p_1+p_2}=\frac{-dx_1}{x_1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{-dx_2}.$$

Une solution très-simple est $\varkappa_1=p_1-p_2=$ constante. Cherchons $\varkappa_2=(\varkappa_1, H_1)$, $\varkappa_3=(\varkappa_2, H_1)$, etc.

$$\varkappa_2=(p_2x_3)(-1)+(p_1x_3)(+1)=x_3\varkappa_1,$$

$$\varkappa_3=(p_2x_3)(-x_3)+(p_1x_3)(+x_3)+\varkappa_1\alpha(p_1-p_2)=\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1}+\alpha\varkappa_1^2.$$

Une fonction $\theta(H_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$ satisfait à (2_2); elle satisfait à (2_1), si elle est une solution du système (b) :

$$\frac{d\varkappa_1}{\varkappa_2}=\frac{d\varkappa_2}{\varkappa_3}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\varkappa_2}{d\varkappa_1}=\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}+\alpha\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2}.$$

On retombe, en intégrant cette relation, sur la valeur θ_1' donnée plus haut, et par suite on arrive à la même intégrale complète.

§ 20. *Méthode de Jacobi sous sa forme la plus simple* (*).

74. *Idée générale de la marche à suivre.* 1° On déduira la valeur

$$p_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n, a_1, p_2, p_3,\ldots,p_n)=\psi_{11}$$

de la première équation II. 2° Cela fait, l'équation (VI), du § 18, où $f_2=f_2(x_1, \ldots, x_n, a_1, p_2, \ldots, p_n)$, savoir

$$(p_1-\psi_{11}, f_2)=0, \qquad (1)$$

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 9 à 11, §§ 18 à 22. Le même résumé se trouve dans Imschenetsky, §§ 20 à 22, pp. 86-121, Graindorge, VII, pp. 55-73, avec des exemples et quelques théorèmes donnés par nous dans les paragraphes précédents.

donnera $f_2 = a_2$, et l'on pourra en tirer

$$p_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n) = \psi_{22},$$

et, par suite,

$$p_1 = \psi_{12}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n),$$

de sorte que l'on aura (§ 18, IV')

$$(p_1 - \psi_{12}, p_2 - \psi_{22}) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

3° On déterminera ensuite $f_3(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n)$, au moyen du système (VI):

$$(p_1 - \psi_{12}, f_3) = 0, \quad (p_2 - \psi_{22}, f_3) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

La fonction f_3 trouvée, en l'égalant à une constante arbitraire a_3, on pourra en tirer la valeur de p_3, que l'on substituera dans les valeurs précédentes de p_1 et p_2. On aura ainsi des équations de la forme

$$p_1 = \psi_{13}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n),$$
$$p_2 = \psi_{23}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n),$$
$$p_3 = \varphi_3(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n) = \psi_{33}.$$

Alors, d'après (IV'):

$$(p_1 - \psi_{13}, p_3 - \psi_{33}) = 0, \ (p_2 - \psi_{23}, p_3 - \psi_{33}) = 0, \ (p_1 - \psi_{13}, p_2 - \psi_{23}) = 0. \ (2')$$

4° Soit ensuite $f_4(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n)$ une fonction satisfaisant aux équations

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0, \ \ldots \quad (3)$$

on tirera p_4 de $f_4 = a_4$, et l'on pourra écrire

$$p_1 = \psi_{14}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_2 = \psi_{24}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_3 = \psi_{34}(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_4 = \varphi_4(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n) = \psi_{44}.$$

es valeurs seront telles d'ailleurs, d'après (IV'), que

$$_1-\psi_{14}, p_4-\psi_{44})=0,\ (p_2-\psi_{24}, p_4-\psi_{44})=0,\ (p_3-\psi_{34}, p_4-\psi_{44})=0, \quad (3')$$

$$_1-\psi_{14}, p_3-\psi_{34})=0,\ (p_2-\psi_{24}, p_3-\psi_{34})=0,$$

$$_1-\psi_{14}, p_2-\psi_{24})=0.$$

t ainsi de suite.

Si l'on appelle $f_1(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n) = a_1$ l'équation donnée, 1 trouvera ainsi le système suivant, auquel nous adjoignons équation donnée elle-même:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = a_1,$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n, a_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = a_2,$$
$$f_3(x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, p_3, \dots, p_n) = a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{n-1}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots; a_{n-2}, p_{n-1}, p_n) = a_{n-1},$$
$$f_n(a_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}, p_n) = a_n;$$

l'on en a déduit

$$p_n = \psi_{nn}(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = \pi_n,$$
$$p_{n-1} = \psi_{n-1,n}(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1; \dots, a_n) = \pi_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$p_2 = \psi_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = \pi_2,$$
$$p_1 = \psi_{1n}(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = \pi_1.$$

est clair, d'après le § 18, que ces valeurs de p satisferont aux onditions d'intégrabilité. Toute la question est donc ramenée à ouver les solutions

$$f_2 = a_2, \quad f_3 = a_3, \quad f_4 = a_4, \dots$$

es équations (1), (2), (3), etc. On va voir que ces intégrations sont lus simples que dans le cas où l'on cherche les équations II, arce que le nombre des variables va sans cesse en décroissant.

75. *Intégration du système (2).* L'équation (1), écrite tout au long, prend la forme :

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta x_1}, & \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \\ \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta p_1}, & \frac{\delta f_2}{\delta p_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta x_2}, & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \\ \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta p_2}, & \frac{\delta f_2}{\delta p_2} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta x_n}, & \frac{\delta f_2}{\delta p_n} \\ \frac{\delta(p_1-\psi_{11})}{\delta p_n}, & \frac{\delta f_2}{\delta p_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en changeant les signes :

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} + \sum_2^n \left(\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_m}\frac{\delta f_2}{\delta p_m} - \frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_m}\frac{\delta f_2}{\delta x_m}\right),$$

équation linéaire par rapport aux dérivées de f_2, ne contenant que $(2n-1)$ variables, $x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$. Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_2}} = \frac{dx_3}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_3}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_3}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_n}}.$$

Pour avoir la relation cherchée $f_2 = a_2$, il suffira d'en connaître une intégrale.

Le système (2) se composera de deux équations

$$\frac{\delta f_3}{\delta x_1} + \sum_3^n \left(\frac{\delta\psi_{12}}{\delta x_m}\frac{\delta f_3}{\delta p_m} - \frac{\delta\psi_{12}}{\delta p_m}\frac{\delta f_3}{\delta x_m}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (2_1)$$

$$\frac{\delta f_3}{\delta x_2} + \sum_3^n \left(\frac{\delta\psi_{22}}{\delta x_m}\frac{\delta f_3}{\delta p_m} - \frac{\delta\psi_{22}}{\delta p_m}\frac{\delta f_3}{\delta x_m}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (2_2)$$

qui contiennent chacun $(2n-5)$ variables indépendantes. Soit θ_1 une solution de (2_1), de sorte que

$$(\theta_1, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$

Posons, afin de voir si θ_1 satisfait aussi à (2_2),

$$\theta_2 = (\theta_1, p_2 - \psi_{22}), \quad \theta_3 = (\theta_2, p_2 - \psi_{22}), \quad \theta_4 = (\theta_3, p_2 - \psi_{22}), \text{ etc.}$$

es fonctions θ_1, θ_2, θ_3, etc., satisfont aussi à (2_1). En effet, l'on a :

$$(p_1 - \psi_{12}, \theta_2) = (p_1 - \psi_{12}, (p_2 - \psi_{22}, \theta_1))$$
$$= -(p_2 - \psi_{22}, (\theta_1, p_1 - \psi_{12})) - (\theta_1, (p_1 - \psi_{12}, p_2 - \psi_{22})).$$

e second membre est nul, en vertu de l'équation (1') et de hypothèse sur θ. Donc

$$(\theta_2, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$

e même

$$(\theta_3, p_1 - \psi_{12}) = 0,$$
$$(\theta_4, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$
. . . .

Il peut arriver deux cas distincts : 1° L'une des fonctions θ est entiquement nulle; dans ce cas cette fonction θ est évidemment solution commune des équations (2). 2° Une des fonctions θ sera ne fonction des précédentes et de x_2, constante dans (2_1). Cela rivera nécessairement avant que l'on ait calculé $(2n - 3)$ foncons θ, puisque les équations différentielles simultanées correspondant à (2_1) peuvent avoir au plus $(2n - 4)$ intégrales distnctes. On verrait comme plus haut (n° 68) qu'il en serait de ıême de toutes les fonctions θ que l'on pourrait calculer ultéicurement.

Supposons que l'on ait trouvé i fonctions θ distinctes. Soit

$$\theta = \theta(x_2, \theta_1, \ldots, \theta_i).$$

'n aura :

$$(\theta, p_2 - \psi_{22}) = (x_2, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + (\theta_1, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} + \cdots + (\theta_i, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial \theta}{\partial \theta_i}$$
$$= \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \theta_2 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} + \theta_3 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} + \cdots + \theta_{i+1} \frac{\partial \theta}{\partial \theta_i}.$$

'ar hypothèse :

$$\theta_{i+1} = \Theta(x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i).$$

'n posera

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \theta_2 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} + \theta_3 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} + \cdots + \Theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta_i} = 0,$$

équation dont l'intégration dépendra de celle du système

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \frac{d\theta_3}{\theta_4} = \cdots = \frac{d\theta_{i-1}}{\theta_i} = \frac{d\theta_i}{\Theta},$$

ou de l'équation

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_2^i} = \Theta\left(x_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dx_2}, \frac{d^2\theta_1}{dx_2^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_2^{i-1}}\right).$$

Il suffira de connaître une intégrale première de cette équation :

$$f_3\left(x_2, \theta_1, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx^{i-1}}\right) = a_2,$$

pour avoir la solution commune cherchée :

$$f_3(x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i) = a_2.$$

En particulier, il sera facile de trouver f_3 dans le cas où $\theta_{i+1} =$ constante k, car alors

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_2^i} = k, \quad \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_2^{i-1}} = kx_2,$$

et

$$f_3 = \theta_i - kx_2.$$

Il est clair, en effet, que si $(\theta_i, p_2 - \psi_{22}) = k$, on a

$$(\theta_i - kx_2, p_2 - \psi_{22}) = 0.$$

Remarque. On aurait pu commencer aussi bien par l'équation (2_2) que par l'équation (2_1). En tout cas, on ne rencontre plus ici l'exception qui rend illusoire la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Si l'on a

$$\theta_2 = (\theta_1, p_2 - \psi_{22}) = \text{constante déterminée } k,$$

on prend simplement pour f_2, l'expression

$$\theta_1 - kx_2,$$

qui donne, en effet,

$$(\theta_1 - kx_2, p_2 - \psi_{22}) = 0,$$

comme plus haut.

Un cas très-simple est celui où l'on a

$$\theta_2 = \theta(x_2, \theta_1),$$

parce que l'équation auxiliaire se réduit à

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\theta_1}{\theta(x_2, \theta_1)}.$$

Elle se simplifie encore quand x_2, θ_1, ou x_2 et θ_1 manquent dans θ.

76. *Intégration du système (3).* Les équations du système (3) contiennent $(2n - 3)$ variables, c'est-à-dire deux de moins que le précédent. Ce système contient trois équations :

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0. \ . \ . \ (3)$$

Soit θ_1 une solution des deux premières, de sorte que

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_1) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, \theta_1) = 0.$$

Substituons-la dans la troisième et formons la suite,

$$\theta_2 = (\theta_1, p_3 - \psi_{33}), \quad \theta_3 = (\theta_2, p_3 - \psi_{33}), \text{ etc.}$$

On aura :

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_2) = (p_1 - \psi_{13}, (\theta_1, p_3 - \psi_{33}))$$
$$= -(p_3 - \psi_{33}, (\theta_1, p_1 - \psi_{13})) - (\theta_1, (p_1 - \psi_{13}, p_3 - \psi_{33})),$$

c'est-à-dire, d'après les équations (2') et la définition de θ_1,

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_2) = 0.$$

De même

$$(p_2 - \psi_{23}, \theta_2) = 0,$$

c'est-à-dire que θ_2 est solution des deux premières équations (3). Il en est de même de θ_3, θ_4, etc. .

La suite des fonctions θ comprend au plus $(2n - 6)$ fonctions distinctes; on arrivera donc à une fonction θ_{i+1}, qui sera fonction des précédentes, et si l'on veut de x_3, qui joue le rôle d'une constante dans les équations (3_1), (3_2). Soit

$$\theta_{i+1} = \Theta(x_3, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i).$$

Les fonctions θ_{i+2}, θ_{i+3}, etc., s'exprimeront de même. Soit maintenant $\theta(x_3, \theta_1, \ldots, \theta_i)$ une fonction nouvelle; elle satisfait à (3_1) et à (3_2), comme on le voit sans peine. Pour qu'elle satisfasse à (3_3), il faudra que l'on ait, comme dans le n° précédent,

$$\frac{d\theta}{dx_3} + \theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_1} + \theta_3 \frac{d\theta}{d\theta_2} + \cdots + \Theta \frac{d\theta}{d\theta_i} = 0,$$

dont il suffira de trouver une intégrale $f_4 = a_4$, ou une du système

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \cdots = \frac{d\theta_i}{\Theta} = 0,$$

ou encore une intégrale première de

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_3^i} = \Theta\left(x_3, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dx_3}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_3^{i-1}}\right).$$

77. *Intégration des autres systèmes et en particulier du dernier.* Il est évident que l'on peut continuer de la même manière l'intégration des systèmes successifs (4), (5), ..., $(n-1)$. Supposons que l'on soit arrivé à ce dernier, qui est :

$$(p_1 - \psi_{1,n-1}, f_n) = 0, \quad (p_2 - \psi_{2,n-2}, f_n) = 0 \ldots (p_{n-1} - \psi_{n-1,n-1}, f_n) = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\delta f_n}{\delta x_1} + \frac{\delta\psi_{1,n-1}}{\delta x_n}\frac{\delta f_n}{\delta p_n} - \frac{\delta\psi_{1,n-1}}{\delta p_n}\frac{\delta f_n}{\delta x_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (n-1_1)$$

$$\frac{\delta f_n}{\delta x_2} + \frac{\delta\psi_{2,n-1}}{\delta x_n}\frac{\delta f_n}{\delta p_n} - \frac{\delta\psi_{2,n-1}}{\delta p_n}\frac{\delta f_n}{\delta x_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (n-1_2)$$

. . . .

$$\frac{\delta f_n}{\delta x_{n-1}} + \frac{\delta\psi_{n-1,n-1}}{\delta x_n}\frac{\delta f_n}{\delta p_n} - \frac{\delta\psi_{n-1,n-1}}{\delta p_n}\frac{\delta f_n}{\delta x_n} = 0 \ldots \quad (n-1_{n-1})$$

On cherchera une solution de $(n-1_1)$; on en déduira d'autres solutions au moyen du théorème fondamental, puis, comme ci-dessus, une solution commune de $(n-1_1)$, $(n-1_2)$. Le théorème fondamental de Jacobi en donnera d'autres, puis on saura trouver une solution commune aux équations $(n-1_1)$, $(n-1_2)$, $(n-1_3)$; et ainsi de suite.

On remarquera que l'intégration de $(n-1_1)$ dépend de la recherche d'une intégrale d'un système d'équations simultanées à trois variables, ou de la recherche d'une intégrale première d'une équation différentielle ordinaire du second ordre. Pour déduire de là une solution commune aux équations $(n-1_1)$, $(n-1_2)$, il faut encore trouver une intégrale première d'une équation qui est *au plus* du second ordre; il en est de même dans la recherche des solutions communes aux 3, aux 4, aux 5... premières équations $(n-1)$. Par conséquent, on a tout au plus à chercher une intégrale première de $(n-1)$ équations du second ordre.

En résumé, on voit que la méthode de Jacobi exige la détermination d'une seule intégrale de chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes d'équations. Parmi ces systèmes, il y en a

1	de l'ordre	$2(n-1)$	servant à	déterminer	f_2,
2	»	$2(n-2)$	»	»	f_3,
3	»	$2(n-3)$	»	»	f_4,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-1$	»	2	»	»	f_n.

C'est là le cas le plus défavorable. On conçoit bien que, dans chaque cas particulier, on peut introduire des simplifications, puisque, en général, dans l'intégration de chacun des systèmes (1), (2),..., $(n-1)$, on peut commencer par telle équation que l'on veut.

78. Exemple (*). Soit l'équation :

$$p_1+(3x_2+2x_3)p_2+(4x_2+3x_3)p_3+[x_4+x_5(p_2-p_3)]\,p_5+\frac{x_5p_5^2}{p_4}=0.$$

(*) Nous l'empruntons à Imschenetsky, n° 89, pp. 116-121. Graindorge, n° 71, pp. 70-73, en donne un autre, emprunté à Ampère, que la méthode de Jacobi permet d'intégrer très-simplement.

1° Il faut trouver d'abord une intégrale de

$$(p_1 - \psi_{11}, f_2) = 0,$$

$(p_1 - \psi_{11})$ représentant le premier membre de l'équation donnée. Le système auxiliaire correspondant est :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_2}} = \cdots = \frac{dx_5}{=\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_5}} = \frac{dp_2}{3p_2 + 4p_3} = \frac{dp_3}{2p_2 + 5p_3} = \frac{dp_4}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_5}}.$$

On en tire

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d(p_2 - p_3)}{p_2 - p_3},$$

et par suite on peut prendre l'intégrale de cette équation pour f_2, c'est-à-dire poser :

$$f_2 = (p_2 - p_3)\, e^{x_1} = a_2.$$

On tire de là, la valeur de p_2, et on la substitue dans p_1. On a ainsi

$$p_1 - \psi_{12} = p_1 + (3x_2 + 2x_3)(p_3 + a_2 e^{-x_1}) + (4x_2 + 5x_3)\, p_3$$
$$+ [x_4 + x_5 a_2 e^{-x_1}]\, p_5 + \frac{x_5 p_5^2}{p_4}; \quad p_2 - \psi_{22} = p_2 - p_3 - a_2 e^{-x_1}.$$

2° Il faudra trouver une solution commune des équations

$$(p_1 - \psi_{12}, f_3) = 0, \quad (p_2 - \psi_{22}, f_3) = 0.$$

On obtient une intégrale de la seconde équation en cherchant une solution d'un système contenant l'équation

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dp_3}{\frac{\delta\psi_{22}}{\delta x_3}},$$

ou

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dp_3}{0}.$$

On pourra donc poser, puisque $p_3 =$ constante est l'intégrale de cette dernière,

$$\theta_1 = p_3.$$

On aura ensuite :

$$\theta_2 = -(p_1 - \psi_{12}, p_3) = -2(p_3 + a_2 e^{-x_1}) - 5p_3 = -7\theta_1 - 2a_2 e^{-x_1}.$$

La suite des fonctions θ s'arrête ici. Il faut maintenant chercher une intégrale de

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d\theta_1}{-7\theta_1 - 2a_2 e^{-x_1}},$$

et ce sera f_3. On trouve :

$$f_3 = \left(\theta_1 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1}\right) e^{7x_1} = \left(p_3 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1}\right) e^{7x_1} = a_3.$$

On tire des résultats précédents :

$$p_3 - \psi_{33} = p_3 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1} - a_3 e^{-7x_1},$$

$$p_2 - \psi_{23} = p_2 - \frac{2}{5} a_2 e^{-x_1} - a_3 e^{-7x_1},$$

$$p_1 - \psi_{13} = p_1 + \text{etc.}$$

5° On considère ensuite les équations

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0.$$

La dernière a pour solution $\theta_1 = p_4 =$ constante, qui satisfait également à la seconde. Ensuite :

$$\theta_2 = (\theta_1, p_1 - \psi_{13}) = -p_5,$$

$$\theta_3 = (\theta_2, p_1 - \psi_{13}) = -a_1 e^{-x_1}\theta_2 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1}.$$

Cela conduit, par la méthode générale, à

$$f_4 = \mathrm{l.}\left(-\frac{p_5}{p_4}\right) - a_2 e^{-x_1} = -\mathrm{l.}\, a_4.$$

D'où

$$p_4 - \psi_{44} = p_4 - p_5 a_4 e^{-a_2 e^{-x_1}},$$
$$p_3 - \psi_{34} = \text{etc.}$$
$$p_2 - \psi_{24} = \text{etc.}$$
$$p_1 - \psi_{14} = \text{etc.}$$

4° La dernière des équations :

$$(p_1 - \psi_{14}, f_5) = 0, \quad (p_2 - \psi_{24}, f_5) = 0, \quad (p_3 - \psi_{34}, f_5) = 0, \quad (p_4 - \psi_{44}, f_5) = 0.$$

a pour solution $\theta_1 = p_5 =$ constante, qui satisfait à la seconde et à la troisième, et donne

$$\theta_2 = (\theta_1, p_1 - \psi_{14}) = -a_2 e^{-x_1}\theta_1 - \frac{1}{a_4} e^{a_2 e^{-x_1}}\theta_1.$$

On trouve alors :

$$f_5 = \text{l}.p_5 - a_2 e^{-x_1} + \frac{1}{a_4}\int e^{a_2 e^{-x_1}} dx_1 = \text{l}.a_5,$$

et

$$p_5 = a_5 \left(e^{a_2 e^{-x_1} - \frac{1}{a_4}\int e^{a_2 e^{-x_1}} dx_1} \right).$$

5° On exprimera p_4, p_3, p_2, p_1 en fonction des x seuls et des constantes. En intégrant l'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4 + p_5 dx_5,$$

on trouvera enfin :

$$z = a_1 + \frac{a_2}{3}(2x_2 - x_3)\, e^{-x_1} + a_3 (x_2 + x_3)\, e^{-7x_1}$$
$$+ a_5 \left(a_4 x_4 + x_5 e^{a_1 e^{-x_1}} \right) e^{-\frac{1}{a_4}\int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1}.$$

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

—

§ 21. *Théorie générale. Méthode de Bour* (*).

79. *Cas où les équations données sont résolues par rapport à* m *des quantités* p. Supposons que l'on ait à chercher une solution commune des m équations :

$$p_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n), \quad \ldots \ldots \quad (1_1)$$
$$p_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n), \quad \ldots \ldots \quad (1_2)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$p_m = \psi_m(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n). \quad \ldots \ldots \quad (1_m)$$

La question revient à chercher $(n - m)$ nouvelles relations entre les p et les x de telle sorte que les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ en $x_1, \ldots, x_n$ que l'on déduit de ces nouvelles équations et des données rendent

$$dz = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

immédiatement intégrable.

(*) *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (Journal de l'école polytechnique, 39[me] cahier, pp. 149-191), surtout le § III, pp. 163-174. La méthode de Bour est exposée dans Graindorge, VIII, pp. 73-89; Imschenetsky, § 23, pp. 121-136; Collet (Annales de l'école normale supérieure, t. VII, pp. 7-47). La théorie de Bour contenait une légère erreur reproduite par ces divers auteurs et corrigée par Mayer dans un excellent petit mémoire (Mathematische Annalen, t. IV, pp. 88-94), dont nous donnons ici la substance. Il a pour titre : *Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function.* Imschenetsky, § 26, pp. 145-156, applique la théorie générale à la détermination des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression différentielle.

Il résulte de là que l'on doit avoir pour les valeurs de i et de k comprises dans la suite 1, 2, 3, ..., m :

$$(p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) = 0 \qquad (3)$$

On doit ici distinguer trois cas :

I. *Il se peut que l'équation* (3) *soit identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de* i *et de* k. Dans ce cas, on trouve la valeur de z en se servant de la méthode de Jacobi pour le cas d'une équation aux dérivées partielles isolée, à partir du moment où l'on connaît dejà m relations entre les p et les x.

On cherchera donc $(n - m)$ autres relations

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ldots, f_{n-m} = a_{n-m},$$

entre les p et les x, et l'on trouvera une solution, dite *intégrale complète* avec $(n - m + 1)$ constantes arbitraires.

II. *On peut trouver, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = \text{constante},$$

ou

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dans ce cas, les équations (1) n'ont pas de solution commune, puisqu'il est, ou bien absolument impossible de satisfaire à la condition (3), où bien l'on ne pourrait y satisfaire qu'en posant $\mathrm{F} = 0$, c'est-à-dire en supposant qu'il y a une relation entre les x (*).

III. *On peut trouver pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = f(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

Dans ce cas, il est clair que, si le système donné a une solution, les relations qui restent à trouver entre les x et les p doivent être telles que l'on ait pour chaque fonction f :

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0.$$

(*) Il y aurait lieu toutefois d'examiner si l'on ne se trouve pas dans le cas des équations *semi-linéaires* de Lie, dont nous n'avons pu donner plus haut (n° 14) que la définition.

Donc, et c'est en cela que consiste essentiellement la méthode de Bour, toutes celles de ces équations $f = 0$ qui sont distinctes, doivent être ajoutées au système primitif puisqu'elles doivent être satisfaites comme les équations données elles-mêmes.

Le système ainsi complété devra être traité comme le système primitif; si le cas I se présente, on achèvera la solution par la méthode de Jacobi; si c'est le cas II que l'on rencontre, le problème n'a pas de solution; si c'est le cas III, nous devrons encore ajouter de nouvelles équations aux équations données et faire la même étude sur un troisième système, composé du précédent et de ces équations nouvelles. Et ainsi de suite.

Il est clair qu'à la fin on tombera sur le cas I ou sur le cas II. En particulier, si l'on rencontre un système contenant plus de n équations, le problème sera impossible.

80. *Cas où les équations sont données sous forme implicite.* Soient

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots, H_m = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

où H désigne une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, les équations données. On prouvera, comme plus haut, que pour les valeurs de i et k, non supérieures à m, on doit avoir

$$(H_i, H_k) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

On trouvera encore trois cas à examiner, et, en outre, un quatrième, qui avait échappé à Bour et qui a été signalé par Mayer.

I. *Les équations* (3') *sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs de* i *et* k, *non supérieures à* m. Dans ce cas, la méthode de Jacobi exposée au § 19 conduira le plus souvent à la solution; dans le cas contraire, on emploiera celle du § 20.

II. *On trouvera, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k :

$$(H_i, H_k) = \text{constante},$$

$$(H_i, H_k) = F(x_1, \ldots, x_n, H_1, H_2, \ldots, H_m),$$

c'est-à-dire,

$$(H_i, H_k) = F(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Dans ce cas, les équations (1′) n'ont pas de solution commune.

III. *On a, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k,

$$(H_i, H_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Dans ce cas, on ajoutera les équations $f = 0$, au système primitif, et l'on refera pour le système complété la même discussion que pour le système primitif, en comprenant le 4[me] cas dans cette discussion.

IV. *Enfin, il se peut que les équations* (3′) *soient satisfaites, non identiquement, mais en vertu des équations* (1′) *elles-mêmes.* Cela arrivera toujours, par exemple, si les premiers membres des équations (1′) sont des carrés parfaits,

$$h_1^2 = 0, \quad h_2^2 = 0, \ldots, h_m^2 = 0,$$

puisque chaque terme de (H_i, H_k) contient le facteur $h_i h_k$. Dans ce cas, il faut bien recourir à la méthode du numéro précédent, pour voir lequel des cas I, II ou III se présente.

Remarques. I. Soit :

$$H_{m+1} = (H_i, H_k).$$

On aura, par le théorème de Jacobi,

$$(H_j, H_{m+1}) = (H_j, (H_i, H_k)) = -(H_i, (H_k, H_j)) - (H_k, (H_j, H_i)).$$

Si l'on a déjà

$$(H_k, H_j) = 0, \quad (H_j, H_i), = 0,$$

on aura, sans nouveau calcul,

$$(H_j, H_{m+1}) = 0.$$

II. Que l'on emploie les équations sous l'une ou sous l'autre forme, en tout cas, il faut que les équations de chaque système considéré soient compatibles algébriquement.

81. *Cas spécial, où il est inutile de recourir aux équations* $p - \psi = 0$ (*). Supposons que l'on ait résolu, par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_m$, les m équations $H = 0$ du numéro précédent, puis que l'on ait remis dans ces équations ces valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_m$; elles deviendront des identités, et l'on aura, par suite :

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0,$$

équation que l'on peut encore écrire :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial (p_m - \psi_m)}{\partial x}.$$

On aura de même :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial (p_m - \psi_m)}{\partial p},$$

même pour p égal à $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Donc

$$(H_i, H_k) = \sum_1^m \sum_1^m \frac{\partial H_i}{\partial p_r}\frac{\partial H_k}{\partial p_s}(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s).$$

Résolvons ces équations par rapport à $(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s)$; le dénominateur de la valeur de ces expressions sera le carré du déterminant

$$D\frac{H_1, H_2, \ldots, H_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m},$$

où l'on suppose d'ailleurs $p_1, p_2, \ldots, p_m$ remplacés par leurs valeurs. Si ce déterminant n'est pas nul, en général, les équations $(H_i, H_k) = 0$ entraîneront les équations $(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s) = 0$, et, par suite, le quatrième cas n'étant pas à considérer dans l'analyse du numéro précédent, on pourra se servir uniquement d'équations de la forme (H_i, H_k) dans l'application de la méthode de Bour.

C'est, en particulier, ce qui arrive toujours dans le cas des

(*) La remarque de ce numéro est encore due à Mayer (Math. Ann., t. IV, pp. 93-94).

équations linéaires, puisque le déterminant D ne contient plus $p_1, p_2, \dots, p_m$.

82. Exemple (*). Considérons les équations

$$H_1 = p_1p_3 - x_2x_4 = 0, \quad H_2 = p_2p_4 - x_1x_3 = 0,$$

linéaires par rapport à p_1 et p_2, et auxquelles on peut par conséquent appliquer la méthode du n° 80, sans s'occuper du 4[me] cas. On trouve

$$(H_1, H_2) = x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4.$$

Posons

$$H_3 = x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0.$$

On aura :

$$(H_1, H_3) = -2(p_1p_3 - x_2x_4) = -2H_1 = 0,$$
$$(H_2, H_3) = +2(p_2p_4 - x_1x_3) = +2H_2 = 0.$$

On déduit des trois relations $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, les deux systèmes suivants de valeurs pour p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = \frac{x_2x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{x_1x_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{p_4x_4}{x_3},$$
$$p_1 = \frac{x_2x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{p_4x_4}{x_2}, \quad p_3 = \frac{x_1x_2}{p_4}.$$

Le second système de valeurs s'obtient en permutant, dans le premier, les indices 2 et 3 ; la solution de la question dans un des cas donnera donc la solution dans l'autre, par la même permu-

(*) Imschenetsky, n° 105, pp. 133-136 ; Collet, pp. 44-47 ; Graindorge, n° 79-83, pp. 77-85. Nous donnons la même solution qu'Imschenetsky ; Collet en donne une plus compliquée, en partant de la solution commune suivante des équations, répondant au second système de valeurs des p :

$$f = x_2x_4 - x_1x_3\left(\frac{x_2}{p_4}\right)^2.$$

Cette valeur est trouvée au moyen de la solution $x_4 - x_1x_2x_3p_4^{-2}$ de la première des trois équations linéaires aux dérivées partielles à intégrer. Graindorge reproduit ces deux solutions sous une autre forme, et donne, en outre, une troisième solution par la méthode de Lagrange, une fois les valeurs de p_1, p_2, p_3 obtenues. Voir un autre exemple, plus bas (n° 93).

tation. Prenons le premier système. On devra appliquer la méthode de Jacobi au système d'équations linéaires simultanées :

$$(p_1 - x_2x_3p_4^{-1}, f) = 0, \quad (p_2 - x_1x_3p_4^{-1}, f) = 0, \quad (p_3 - p_4x_4x_3^{-1}, f) = 0,$$

où f est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 et p_4. Les deux premières de ces équations écrites toutes au long sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_4} x_2x_3p_4^{-2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_4} x_1x_3p_4^{-2} = 0.$$

Elles ont pour solution commune $\theta_1 = p_4$. Plaçons cette expression dans le premier membre de la troisième et nous trouverons une seconde solution commune aux deux premières, savoir $\theta_2 = p_4 x_3^{-1}$. Il n'y en a pas d'autre distincte de θ_1 et θ_2. La solution commune aux trois équations devra satisfaire ensuite à l'équation :

$$\frac{dx_3}{\theta_1} = \frac{d\theta_1}{\theta_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{dx_3}{x_3}.$$

Celle-ci conduit enfin à la solution commune

$$p_4 = ax_3.$$

On déduit de cette valeur de p_4, et des résultats précédents :

$$p_1 = \frac{x_2}{a}, \quad p_2 = \frac{x_1}{a}, \quad p_3 = ax_4,$$
$$dz = \frac{1}{a}(x_2dx_1 + x_1dx_2) + a(x_4dx_3 + x_3dx_4),$$
$$z = \frac{1}{a}x_1x_2 + ax_3x_4 + b.$$

Par permutation tournante, on trouve une autre solution :

$$z = \frac{1}{a}x_1x_3 + ax_2x_4 + b.$$

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DE CLEBSCH ET DE WEILER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI (*).

—

§ 22. *Réduction d'un système complet d'équations linéaires à un système de Jacobi, ou transformation de Clebsch.*

83. *Propriété d'un système complet.* Soit un système d'équations linéaires aux dérivées partielles homogènes :

$$A_1 z = 0, \quad A_2 z = 0, \ldots, A_\mu z = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où

$$Az = a_1 \frac{dz}{dx_1} + a_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots + a_n \frac{dz}{dx_n}.$$

Pour que les équations du système donné aient une solution commune, il faut que l'on ait pour les valeurs de i et de k, non supérieures à μ,

$$(A_i A_k - A_k A_i) z = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

comme on l'a vu au § 17.

Si ces relations sont *identiquement* satisfaites, Clebsch appelle le système donné *un système de Jacobi;* si le premier membre des équations (2) est une combinaison linéaire des équations (1), il l'appelle *système complet* et nous savons que dans ce cas encore les équations (1) ont une solution commune, comme on l'a vu au chapitre précédent. Enfin si les équations (2) ne sont pas satis-

(*) Clebsch, *Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen* (Journal de Crelle, t. LXV, pp. 257-268), pp. 257-266. Nous n'avons pu consulter le mémoire de Weiler, cité par Clebsch (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik, etc., t. VIII, année 1863, p. 264).

faites pour toutes les valeurs de i et de k, la méthode de Bour permet de transformer le système donné en un système complet, ou de voir qu'il n'a pas de solution. Il suffit donc de considérer les systèmes complets et les systèmes de Jacobi.

Cela posé, soit donné le système complet (1). Soient ensuite :

$$\begin{aligned} Mz &= m_1 A_1 z + m_2 A_2 z + \cdots + m_\mu A_\mu z = 0, \\ Nz &= n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z = 0, \end{aligned}$$

deux combinaisons linéaires des équations données. Il en sera de même de

$$MNz - NMz = 0.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} MNz = {} & m_1 A_1 \, (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ & + m_2 A_2 \, (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + m_\mu A_\mu \, (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ & = (Mn_1 \times A_1 z + \cdots + Mn_\mu \times A_\mu z) + \sum_{11}^{\mu\mu} m_i n_k A_i A_k z. \end{aligned}$$

Donc :

$$(MN - NM)\, z = \Sigma\, (Mn_i - Nm_i) \times A_i z + \sum_{11}^{\mu\mu} m_i n_k \, (A_i A_k - A_k A_i)\, z.$$

La première partie du second membre est d'elle-même une combinaison linéaire des équations données; il en est de même de la seconde, à cause des équations (2). Donc enfin :

On peut remplacer dans un système complet, un certain nombre d'équations, par un nombre égal d'autres équations qui sont des combinaisons des équations données, sans qu'il cesse d'être un système complet.

84. *Réduction d'un système complet à un système de Jacobi.* Soient

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu,$$

μ fonctions arbitraires, et déduisons les équations :

$$B_1 z = 0, \quad B_2 z = 0, \quad B_3 z = 0, \ldots, B_\mu z = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

des relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A_1z = A_1u_1.B_1z + A_1u_2.B_2z + \cdots + A_1u_\mu.B_\mu z, \\ A_2z = A_2u_1.B_1z + A_2u_2.B_2z + \cdots + A_2u_\mu.B_\mu z, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_\mu z = A_\mu u_1.B_1z + A_\mu u_2.B_2z + \cdots + A_\mu u_\mu.B_\mu z. \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (4)$$

Le système (3) sera un système de Jacobi, c'est-à-dire que l'on aura *identiquement*

$$(B_iB_k - B_kB_i)\,z = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Faisons, en effet, dans les équations (4), successivement $z = u_1$, $z = u_2, \ldots, z = u_\mu$. On trouvera, comme il est aisé de le voir :

$$B_1u_1 = 1, \quad B_2u_1 = 0, \quad B_3u_1 = 0, \ldots, B_\mu u_1 = 0, \ . \ . \ . \ . \ (6_1)$$

$$B_1u_2 = 0, \quad B_2u_2 = 1, \quad B_3u_2 = 0, \ldots, B_\mu u_2 = 0, \ . \ . \ . \ . \ (6_2)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$B_1u_\mu = 0, \quad B_2u_\mu = 0, \quad B_3u_\mu = 0, \ldots, B_\mu u_\mu = 1, \ . \ . \ . \ . \ (6_\mu)$$

c'est-à-dire :

$$B_iu_k = 0, \quad B_iu_i = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

D'après le numéro 83, $(B_iB_k - B_kB_i)z$ est une combinaison linéaire des expressions Az, ou, d'après (4), des expressions Bz. Donc :

$$(B_iB_k - B_kB_i)\,z = C_1B_1z + C_2B_2z + C_3B_3z + \cdots + C_\mu B_\mu z = 0. \ . \ (7)$$

Faisons dans cette équation $z = u_1$, $z = u_2, \ldots, z = u_\mu$; il viendra

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0, \ldots, C_\mu = 0,$$

d'après les relations (6_i). Donc enfin l'équation (5) est identiquement satisfaite.

Corollaire. Le système (3) de Jacobi est tel que l'on connaît $(\mu - 1)$ solutions distinctes de chacune des équations qui le composent, comme le prouvent les relations (6).

85. *Intégration du système des équations* $Bz = 0$. La méthode consiste, comme nous l'avons déjà dit, à chercher d'abord une

solution de la première équation, puis une des deux premières, puis une des trois premières, et ainsi de suite. Mais la solution se simplifie à cause du corollaire du numéro précédent. Supposons, en effet, que nous ayons trouvé une solution θ_1 des $(i-1)$ premières équations, différente des solutions connues immédiatement, savoir u_i, u_{i+1}, ..., u_μ. On posera :

$$\theta_2 = B_i\theta_1, \quad \theta_3 = B_i\theta_2, \quad \text{etc.}$$

θ_2, θ_3, etc., seront encore des solutions des $(i-1)$ premières équations. Comme on ne peut trouver plus de $n-(i-1)$ solutions communes pour $(i-1)$ équations à n variables indépendantes, on est sûr que la série des valeurs

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_\mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ne peut contenir plus de $n-(i-1)$ valeurs distinctes; r est donc au plus égal à $(n-\mu)$. Nous chercherons ensuite, comme on a fait plus haut, une fonction

$$\theta\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, u_i, \ldots, u_\mu)$$

qui satisfasse à $B_i z = 0$. Pour cela, on devra avoir

$$B_i\theta_1 \frac{d\theta}{d\theta_1} + B_i\theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_2} + \cdots + B_i\theta_r \frac{d\theta}{d\theta_r} + B_i u_i \frac{d\theta}{du_i} + \cdots + B_i u_\mu \frac{d\theta}{du_\mu} = 0.$$

A cause de la définition des θ et des équations (6), cette équation auxiliaire se réduit à

$$\frac{d\theta}{du_i} + \theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_1} + \theta_3 \frac{d\theta}{d\theta_2} + \cdots + \theta_{r+1} \frac{d\theta}{d\theta_r} = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

où θ_{r+1} est une fonction des autres solutions des $(i-1)$ premières équations $Bz = 0$. Ainsi l'existence des équations (6) simplifie la recherche de la série (8) et l'équation auxiliaire.

La solution complète du système (2) s'achève par les méthodes indiquées dans le chapitre précédent.

§ 23. *Méthode de Weiler pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles auxquels conduit la méthode de Jacobi.*

86. *Notations et conventions spéciales pour l'application de la méthode du § précédent.* Pour plus de facilité, nous écrirons comme suit les systèmes du n° 67 :

$$A_1H_2 = 0, \qquad (1_1)$$
$$A_1H_3 = 0,\quad A_2H_3 = 0, \qquad (1_2)$$
$$A_1H_4 = 0,\quad A_2H_4 = 0,\quad A_3H_4 = 0, \qquad (1_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_1H_n = 0,\quad A_2H_n = 0,\quad A_3H_n = 0, \dots, A_{n-1}H_n = 0, \qquad (1_{n-1})$$

et les systèmes transformés :

$$B_{11}H_2 = 0, \qquad (1'_1)$$
$$B_{12}H_3 = 0,\quad B_{22}H_3 = 0, \qquad (1'_2)$$
$$B_{13}H_4 = 0,\quad B_{23}H_4 = 0,\quad B_{33}H_4 = 0, \qquad (1'_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$B_{1,n-1}H_n = 0,\quad B_{2,n-1}H_n = 0,\quad B_{3,n-1}H_n = 0, \dots, B_{n-1,n-1}H_n = 0. \qquad (1'_{n-1})$$

Pour effectuer la transformation de Clebsch, nous nous astreindrons aux règles suivantes : 1° Les u seront les mêmes pour le système (1_{i-1}) et le système (1_i), sauf que l'on prendra, pour transformer (1_i), une fonction u_i de plus ; 2° Cette fonction u_i sera une solution du système transformé $(1'_{i-1})$; 3° Les systèmes (1_1), (1_2), $(1_3), \dots, (1_{n-1})$ n'étant pas indépendants, mais chacun ne différant du précédent que par l'addition d'une équation, pour transformer un système (1_i) quelconque, nous le supposerons remplacé par $(1'_{i-1})$ auquel on ajoute l'équation $A_iH_{i+1} = 0$.

La fonction u_1 est arbitraire ; $u_2, \dots, u_{n-1}$, sont telles que l'on a :

$$B_{11}u_2 = 0,$$
$$B_{12}u_3 = 0,\quad B_{22}u_3 = 0,$$
$$B_{13}u_4 = 0,\quad B_{23}u_4 = 0,\quad B_{33}u_4 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$B_{1,n-2}u_{n-1} = 0,\quad B_{2,n-2}u_{n-1} = 0,\quad B_{3,n-2}u_{n-1} = 0, \dots, B_{n-2,n-2}u_{n-1} = 0. \qquad (2)$$

On aura d'ailleurs, comme dans les transformations du paragraphe précédent,

$$B_{11}u_1 = 1,\quad B_{22}u_2 = 1, \ldots, B_{n-1,n-1}u_{n-1} = 1,$$
$$B_{12}u_1 = 1,\quad B_{23}u_2 = 1, \ldots,$$
$$B_{13}u_1 = 1,\quad B_{24}u_2 = 1, \ldots,$$
$$B_{14}u_1 = 1, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{1,i-1}u_1 = 1,\quad B_{2,i}u_2 = 1, \ldots \ldots \qquad (3)$$

87. *Transformation de Weiler.* Les formules générales de transformation sont, pour le système (1_i), quand on n'emploie pas la dernière convention du numéro précédent, en faisant $H_{i+1} = z$,

$$A_1 z = A_1 u_1\, B_{1i} z + A_1 u_2\, B_{2i} z + \cdots + A_1 u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_1 u_i\, B_{i,i} z,$$
$$A_2 z = A_2 u_1\, B_{1i} z + A_2 u_2\, B_{2i} z + \cdots + A_2 u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_2 u_i\, B_{i,i} z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{i-1} z = A_{i-1} u_1 B_{1i} z + A_{i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots + A_{i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_{i-1} u_i B_{i,i} z,$$
$$A_i z = A_i u_1\, B_{1i} z + A_i u_2\, B_{2i} z + \cdots + A_i u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_i u_i\, B_{i,i} z. \quad (4)$$

Les $(i-1)$ premières de ces relations deviennent :

$$B_{1,i-1} z = B_{1,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{1,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots$$
$$+ B_{1,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{1,i-1} u_i B_{i,i} z,$$
$$B_{2,i-1} z = B_{2,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{2,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots$$
$$+ B_{2,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{2,i-1} u_i B_{i,i} z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{i-1,i-1} z = B_{i-1,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{i-1,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots$$
$$+ B_{i-1,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{i-1,i-1} u_i B_{i,i} z;$$

si nous y introduisons la dernière convention (n° 86, 3°). Les conventions relatives aux u donnent ensuite, d'après les relations (2) et (3),

$$B_{1,i-1} z = B_{1,i} z,$$
$$B_{2,i-1} z = B_{2,i} z,$$
$$\ldots\ldots$$
$$B_{i-2,i-1} z = B_{i-2,i} z,$$
$$B_{i-1,i-1} z = B_{i-1,i} z + B_{i-1,i-1} u_i B_{i,i} z \ldots\ldots \qquad (5)$$

Donc le système $(1'_i)$ est le système $(1'_{i-1})$, dont on a retranché la dernière équation, et auquel on ajoute deux nouvelles relations $B_{i-1,i}z = 0$, $B_{i-1}z = 0$, déterminées par les équations (4) et (5).

On peut donc représenter comme suit le système transformé :

$$
\begin{array}{llll}
C_1H_2 = 0, & & & \\
D_1H_3 = 0, & C_2H_3 = 0, & & \\
D_1H_4 = 0, & D_2H_4 = 0, & C_3H_4 = 0, & \\
D_1H_5 = 0, & D_2H_5 = 0, & D_3H_5 = 0, & C_4H_5 = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

$$D_1H_{n-1} = 0,\quad D_2H_{n-1} = 0, \ldots, C_{n-2}H_{n-1} = 0,$$
$$D_1H_n \; = 0,\quad D_2H_n \; = 0, \ldots, D_{n-2}H_n \; = 0,\quad C_{n-1}H_n = 0.$$

Les opérations désignées ici par C et D sont déterminées par les équations :

$$C_{i-1}F = D_{i-1}F + C_{i-1}u_iC_iF,$$
$$A_iF = A_iu_1 . D_1F + \cdots + A_iu_{i-1}D_{i-1}F + A_iu_iC_iF.$$

Au lieu du nombre d'intégrations indiquées au n° 77, il suffit, par la méthode de Clebsch et de Weiler, de chercher *une* intégrale

de 1 équation différentielle d'ordre $2n-2$ pour trouver H_2,
de 2 équations différentielles d'ordre $2n-4$ » » H_3,
de 2 » » » $2n-6$ » » H_4,
. . . .
de 2 équations différentielles d'ordre 2 pour trouver H_n.

Toutefois il importe de remarquer que la simplification ne sera aussi grande que si les nombres analogues à r dans le paragraphe précédent ont toujours leur valeur maxima. Dans le cas contraire, la simplification s'arrête parce que l'on ne trouve plus des fonctions u en nombre suffisant pour l'effectuer complétement.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DE KORKINE ET DE BOOLE.

[§ 24. *Méthode de Korkine* (*).

88. *Idée générale de la méthode de Korkine.* Dans la méthode de Clebsch et de Weiler, comme dans celle de Jacobi et de Bour, les systèmes d'équations simultanées sont traités absolument de la même manière qu'une équation unique, à laquelle on serait parvenu d'adjoindre, par bonheur, sans calcul, des relations entre les variables x, les dérivées partielles p, et des constantes arbitraires. Il n'y a aucune différence entre l'intégration d'un système d'équations simultanées et l'achèvement de l'intégration commencée d'une équation unique.

Dans les méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer que nous exposons dans ce chapitre et le suivant, on part encore des idées de Jacobi, mais de plus, on élimine une variable, chaque fois que l'on parvient à intégrer une des équations simultanées. La méthode de Korkine s'applique aux équations quelconques, celle de Boole aux équations linéaires générales, celle de Mayer également, et de plus, spécialement aux équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi. La méthode de Mayer contient en outre une autre idée, empruntée à la méthode de Cauchy, savoir, celle de l'introduction des valeurs initiales des variables, comme constantes.

(*) Korkine, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. LXVIII, pp. 1460-1464, 1869, 1er semestre. Nous supposons que l'on fait disparaître la variable z des diverses équations, ce qui simplifie considérablement les calculs. La méthode de Korkine est la seconde méthode d'abaissement de Bour, comme il le dit lui-même. Le § 24 tout entier a été ajouté au Mémoire primitif, en 1874.

Voici en quoi consiste la méthode générale de Korkine. Soient

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1, \ldots \ldots \quad (1_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_m, \ldots \ldots \quad (1_m)$$

m équations simultanées qui satisfont identiquement, pour les valeurs de i et k, non supérieures à m, à la condition

$$(f_i, f_k) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \begin{vmatrix} \frac{\delta f_i}{\delta x}, & \frac{\delta f_k}{\delta x} \\ \frac{\delta f_i}{\delta p}, & \frac{\delta f_k}{\delta p} \end{vmatrix} = 0. \ldots \ldots \quad (2)$$

Intégrons l'une des équations (1), par exemple (1_m), et soit

$$z + u = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots \ldots \quad (3)$$

l'intégrale complète trouvée, $u, y_1, \ldots, y_{n-1}$ étant les constantes arbitraires. On sait, par le n° 15, que u accompagne z, comme nous le supposons ici. La relation (3) donne :

$$p_1 = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_1}, \ldots, p_n = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_m} \ldots \ldots \quad (4)$$

Si l'on suppose que u soit une certaine fonction des quantités y, on déduira de l'intégrale complète (3) une intégrale générale, si l'on y adjoint les relations,

$$q_1 = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta y_1}, \ldots, q_{n-1} = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta y_{n-1}}; \ldots \ldots \quad (5)$$

où

$$q_1 = \frac{du}{dy_1}, \ldots, q_{n-1} = \frac{du}{dy_{n-1}}.$$

Dans la méthode de Korkine, on se propose de déterminer la forme de la fonction u en $y_1, \ldots, y_{n-1}$, de manière que l'intégrale

générale de (1_m) dont nous venons de parler, satisfasse aussi aux autres équations $(1_1), \ldots, (1_{m-1})$ du système. Pour cela, déduisons des équations (4) et (5) les valeurs de

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n,$$

en fonction de

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n, q_1, \ldots, q_{n-1},$$

et substituons-les dans les équations (1). La dernière deviendra une identité, puisque les équations (3), (4) et (5) donnent une intégrale générale de (1_m). Les autres se transformeront en un système de $(m-1)$ équations simultanées entre $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, $q_1, \ldots, q_{n-1}$, jouissant des deux propriétés suivantes (*) :

1° Elles ne contiendront plus la variable x_n;

2° Elles satisferont à des conditions d'intégrabilité analogues à l'équation (2), par rapport aux quantités y et q.

On déduira de ce nouveau système de $(m-1)$ équations contenant $(n-1)$ variables indépendantes, un troisième système qui contiendra une équation et une variable de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation unique contenant $(n-m)$ variables indépendantes.

La méthode générale se simplifie un peu, quand quelques-unes des quantités p manquent dans l'équation $f_n = 0$.

89. *Démonstration de la première propriété du système transformé* (**). Soit, après l'élimination de $x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n$,

$$\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n, q_1, \ldots, q_{n-1}) = f_i\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta F}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\right).$$

On aura :

$$\frac{df_i}{dx_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{df_i}{dx_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{df_i}{dx_n} - \frac{\delta\varphi}{\delta x_n} = 0.$$

(*) Toutes les méthodes où l'on procède par élimination conduisent à des propriétés semblables. On en a déjà vu un exemple à propos de la méthode de Pfaff (n° 43). Les recherches de Lie rendront probablement inutiles toutes les démonstrations analytiques des théorèmes de ce genre.

(**) Korkine énonce les propriétés en question sans les démontrer.

De même, des équations (5), on tire

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_n} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dx_1}{dx_n}, \cdots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}$, entre ces équations, conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{df_i}{dx_1}, & \cdots, & \frac{df_i}{dx_{n-1}}, & \frac{df_i}{dx_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_{n-1}}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_{n-1}}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les colonnes de ce déterminant, respectivement par

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}, \ \frac{\partial f_m}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial p_n},$$

et ajoutons-les à la dernière; remarquons, en outre, que

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dy_i} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dy_i} = 0,$$

puisque f_m est identiquement nul, après substitution des valeurs (4) des quantités p, et posons :

$$U = \frac{df_i}{dx_1}\frac{\partial f_m}{dp_1} + \cdots + \frac{df_i}{dx_n}\frac{\partial f_m}{\partial p_n};$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} \frac{df_i}{dx_1}, & \cdots, & \frac{df_i}{dx_{n-1}}, & U - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_{n-1}}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_{n-1}}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où, chaque fois que le déterminant

$$D \frac{q_1, \ldots, q_{n-1}}{x_1, \ldots, x_{n-1}}$$

ne sera pas nul, ce qui est évidemment le cas général,

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot$$

Or, U est nul d'après l'équation

$$(f_i, f_m) = 0,$$

comme on va le voir. En effet, on a :

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_k} = -\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\partial f_m}{\partial p_l} \frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} \cdot$$

Par conséquent,

$$0 = (f_i, f_m) = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_k}, & \frac{\partial f_m}{\partial p_k} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, & -\left(\frac{\partial f_m}{\partial p_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_k}\right) \cdot \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_k}, & \frac{\partial f_m}{\partial p_k}, \end{vmatrix}$$

Ordonnons la somme du second membre par rapport à

$$\frac{\delta f_m}{\delta p_1}, \frac{\delta f_m}{\delta p_2}, \dots,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{\delta f_m}{\delta p_1}\left(\frac{\delta f_i}{\delta x_1} + \frac{\delta f_i}{\delta p_1}\frac{\delta^2 F}{\delta x_1^2} + \dots + \frac{\delta f_i}{\delta p_n}\frac{\delta^2 F}{\delta x_n \delta x_1}\right) +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{\delta f_m}{\delta p_n}\left(\frac{\delta f_i}{\delta x_n} + \frac{\delta f_i}{\delta p_1}\frac{\delta^2 F}{\delta x_1 \delta x_n} + \dots + \frac{\delta f_i}{\delta p_n}\frac{\delta^2 F}{\delta x_n^2}\right) = 0,$$

ou, en abrégé,

$$\frac{\delta f_m}{\delta p_1}\frac{df_i}{dx_1} + \dots + \frac{\delta f_m}{\delta p_n}\frac{df_i}{dx_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$U = 0.$$

Donc enfin, on a aussi

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_n} = 0,$$

c'est-à-dire que les équations transformées ne contiennent plus x_n.

90. *Démonstration de la seconde propriété du système transformé.* Considérons deux des fonctions f, par exemple, f_1 et f_2 et soit posé, pour plus de facilité, après élimination des x, au moyen des relations qui donnent les quantités q,

$$f_1\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\right) = \varphi\,(y_1, \dots, y_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}),$$
$$f_2\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\right) = \psi\,(y_1, \dots, y_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}).$$

En remplaçant dans le second membre de ces égalités les quantités q, par leur valeur, on obtiendra les identités suivantes :

$$f_1\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\right) = \varphi\left(y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{\delta F}{\delta y_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta y_{n-1}}\right), \quad (6_1)$$
$$f_2\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\right) = \psi\left(y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{\delta F}{\delta y_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta y_{n-1}}\right). \quad (6_2)$$

On déduit immédiatement de ces identités, en dérivant par rapport à une quelconque des variables y :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y}.$$

Par suite, dans l'expression

$$(\varphi, \psi) = \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \end{vmatrix}$$

entre, avec le signe —, la somme suivante de déterminants :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1}\partial y_i}, & \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_i} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1}\partial y_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \end{vmatrix}.$$

Or cette somme est nulle, car la quantité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_i}$$

est multipliée par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_k},$$

dans le déterminant correspondant à l'indice i; mais la quantité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}$$

est multipliée par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

dans le déterminant correspondant à l'indice k. Donc tous les termes se détruisent deux à deux.

Il résulte de là que la quantité (φ, ψ) est égale simplement à

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_i} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_i}, & \frac{\delta \varphi}{\delta q_i} \\ \frac{\delta f_2}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_i} + \cdots + \frac{\delta f_2}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_i}, & \frac{\delta \psi}{\delta q_i} \end{vmatrix}$$

Pour démontrer le second théorème de Korkine, il suffit de montrer que cette expression, que nous représentons en abrégé, par

$$\sum \begin{vmatrix} f'_{1i}, & \frac{\delta \varphi}{\delta q_i} \\ f'_{2i}, & \frac{\delta \psi}{\delta q_i} \end{vmatrix},$$

est nulle.

Pour cela, il faut trouver $\frac{\delta \varphi}{\delta q_i}$, $\frac{\delta \psi}{\delta q_i}$, et exprimer, en outre, que la substitution est telle que f_1 et f_2, après la transformation, ne contiennent plus x_n.

Pour trouver $\frac{\delta \varphi}{\delta q_1}$, dérivons par rapport à q les valeurs des fonctions $\varphi, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_{n-1}$, comme suit :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta q_1} = \frac{\delta f_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} + \frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dq_1},$$

$$0 = \frac{\delta p_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta p_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} - \frac{dp_1}{dq_1},$$

. . . .

$$0 = \frac{\delta p_n}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta p_n}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} - \frac{dp_n}{dq_1},$$

$$1 = \frac{\delta q_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1},$$

$$0 = \frac{\delta q_2}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_2}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1},$$

. . . .

$$0 = \frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1}.$$

On déduit de là, par élimination des dérivées des x et des p, par rapport à q_1,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ 0, & \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial p_1}{\partial x_{n-1}}, & -1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \frac{\partial p_n}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}, & 0, & \ldots, & -1 \\ 1, & \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial q_n}{\partial x_{n-1}}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial q_2}{\partial x_{n-1}}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1} & ,\ldots, & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant la première colonne par f'_{21}, puis ajoutant tous les déterminants semblables, obtenus en remplaçant $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$, par $\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$, ..., on trouve un nouveau déterminant nul et ne différant du précédent qu'en ce que la première colonne est

$$\begin{array}{c} \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} f'_{2i}, \\ 0, \\ \vdots \\ 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_{n-1}}, \end{array}$$

tandis que les autres colonnes restent les mêmes.

Multipliant les lignes du déterminant ainsi obtenu, à partir de la seconde, respectivement par

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial p_n}, \; -\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}},$$

puis ajoutons-les à la première ligne; celle-ci, à cause de l'équation suivante, déduite de (6_1),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta f_1}{\delta x_i}+\frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta x_i}+\cdots+\frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta x_i}\\ &=\frac{\delta\varphi}{\delta q_1}\frac{\delta q_1}{\delta x_i}+\cdots+\frac{\delta\varphi}{\delta q_{n-1}}\frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_i}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

n'aura que son premier élément non identiquement nul. Cet élément sera

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\frac{\delta\varphi}{\delta q_i}f'_{2i}\\ &-\left\{\frac{\delta\varphi}{\delta q_1}\left(\frac{\delta f_2}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_1}+\cdots+\frac{\delta f_2}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_1}\right)\right.\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\left.+\frac{\delta\varphi}{\delta q_{n-1}}\left(\frac{\delta f_2}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_{n-1}}+\cdots+\frac{\delta f_2}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_{n-1}}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (8)$$

A cause de

$$\frac{\delta p_i}{\delta y_k}=\frac{\delta^2 F}{\delta x_i\delta y_k}=\frac{\delta q_k}{\delta x_i},$$

la partie de cet élément précédée du signe $-$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\delta f_2}{\delta p_1}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta q_1}\frac{\delta q_1}{\delta x_1}+\cdots+\frac{\delta\varphi}{\delta q_{n-1}}\frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_1}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\delta f_2}{\delta p_n}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta q_1}\frac{\delta q_1}{\delta x_n}+\cdots+\frac{\delta\varphi}{\delta q_n}\frac{\delta q_n}{\delta x_n}\right).\end{aligned}$$

L'équation (7) nous donne encore, au lieu de cette expression,

$$\begin{aligned}&\frac{\delta f_2}{\delta p_1}\left(\frac{\delta f_1}{\delta x_1}+\frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta x_1}+\cdots+\frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta x_1}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\delta f_2}{\delta p_n}\left(\frac{\delta f_1}{\delta x_n}+\frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta x_n}+\cdots+\frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta x_n}\right).\end{aligned}$$

Le déterminant dont l'expression (8) est le premier élément, étant nul, et les autres éléments de sa première ligne étant des

quantités nulles, ce premier élément doit être nul lui-même. Donc enfin,

$$\sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} f'_{2i} = \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} + \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}.$$

On trouvera de même :

$$\sum_1^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} f'_{1i} = \sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial p_i} + \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Soustrayant la première de ces égalités de la seconde, il vient

$$(\varphi, \psi) = -(f_1, f_2) = 0,$$

ce qui constitue la seconde propriété du système transformé.

On remarquera que nous n'avons pas exprimé explicitement que f_1 et f_2, ne contiennent plus x_n après la transformation. Mais on le suppose implicitement, en employant les équations (6) (*)].

§ 25. *Équations linéaires. Méthode de Boole* (**).

91. *Forme spéciale des équations linéaires et de leurs conditions d'intégrabilité* (***). Soient à considérer m équations linéaires :

$$H_1 = b_{11} p_1 + b_{12} p_2 + \cdots + b_{1,N} p_N = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_m = b_{m1} p_1 + b_{m2} p_2 + \cdots + b_{m,N} p_N = 0,$$

(*) Korkine conclut de ces deux théorèmes que le système donné à une solution, avec $(n + 1 - m)$ constantes. La réciproque est plus facile à démontrer, en s'appuyant sur la théorie de Jacobi et de Bour, comme il est facile de le voir. Dans cet ordre d'idées, les grandes et pénibles démonstrations que nous donnons ici deviennent inutiles.

(**) Boole, Treatise, etc., Supplément, ch. XXIV, pp. 68-69; ch. XXV, pp. 74-89. Collet, Annales de l'école normale, t. VII, pp. 47-57.

(***) Voir sur ce sujet, outre les précédents, Imschenetsky, § 24, pp. 136-141. Ni cet auteur, ni Graindorge n'exposent la méthode de Boole.

où entrent $(m + n) = N$ variables indépendantes,

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_N,$$

et les dérivées de z par rapport à ces variables,

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_N.$$

Nous pouvons déduire des équations données m autres relations dont chacune contiendra une seule des m premières dérivées. Pour plus de symétrie nous représenterons les variables

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_N,$$

par

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

et les dérivées correspondantes par

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Cela posé, les m nouvelles équations seront de la forme :

$$\begin{aligned}
A_1 z &= p_1 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \cdots + a_{1,n} q_n = 0,\\
A_2 z &= p_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \cdots + a_{2,n} q_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_m z &= p_m + a_{m,1} q_1 + a_{m,2} q_2 + \cdots + a_{m,n} q_n = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégrabilité, comme on le sait, par le § 17, sont toutes de la forme

$$(A_i A_k - A_k A_i)\, z = 0,$$

ou encore, en développant :

$$q_1 (A_i a_{k1} - A_k a_{i1}) + q_2 (A_i a_{k2} - A_k a_{i2}) + \cdots + q_n (A_i a_{kn} - A_k a_{in}) = 0.$$

Il sera facile, au moyen de cette formule, de chercher les conditions d'intégrabilité et de compléter le système des équations don-

nées, jusqu'à ce qu'il ait pris une forme telle que l'on puisse y appliquer la méthode d'intégration de Jacobi et de Bour.

92. *Transformation des équations linéaires* (*). Prenons de nouvelles variables indépendantes

$$u_1, u_2, \ldots, u_N.$$

On aura

$$p_1 = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dx_1} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dx_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_m = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dx_m} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dx_m},$$

$$q_1 = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dy_1} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dy_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dy_n} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dy_n}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations $Az = 0$, elles deviendront :

$$A_1 z = (A_1 u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_1 u_N)\frac{dz}{du_N} = 0,$$

$$A_2 z = (A_2 u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_2 u_N)\frac{dz}{du_N} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m z = (A_m u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_m u_N)\frac{dz}{du_N} = 0.$$

On peut simplifier ces équations et leur rendre la forme des équations $Az = 0$, en posant :

$$u = x_1,\ u_2 = x_2, \ldots,\ u_m = x_m,\ u_{m+1} = v_1,\ u_{m+2} = v_2, \ldots,\ u_N = v_n.$$

(*) On pourrait démontrer que le système transformé satisfait aux conditions d'intégrabilité; mais la chose est inutile (voir la note de la fin du numéro 90), d'autant plus que la méthode même suppose l'existence d'une solution z contenant $(n+1)$ constantes arbitraires.

Les équations transformées, à cause des relations :

$$A_1x_1 = 1,\quad A_1x_2 = 0, \ldots, A_1x_m = 0,$$
$$A_2x_1 = 0,\quad A_1x_2 = 1, \ldots, A_2x_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_mx_1 = 0,\quad A_mx_2 = 0, \ldots, A_mx_m = 1,$$

deviennent :

$$A_1z = \left(\frac{dz}{dx_1}\right) + (A_1v_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_1v_n)\frac{dz}{dv_n} = 0,$$
$$A_2z = \left(\frac{dz}{dx_2}\right) + (A_2v_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_2v_n)\frac{dz}{dv_n} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_mz = \left(\frac{dz}{dx_m}\right) + (A_mv_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_mv_n)\frac{dz}{dv_n} = 0\ (^*).$$

Il est facile de faire en sorte que les $(m-1)$ dernières de ces équations ne contiennent plus explicitement x_1. Supposons que

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

constituent avec $x_2, x_3, \ldots, x_m$, les $(m+n-1)$ solutions distinctes de la première équation $A_1z = 0$, de telle sorte que

$$A_1v_1 = 0,\quad A_1v_2 = 0, \ldots, A_1v_n = 0.$$

L'un quelconque des coefficients des $(m-1)$ dernières équations, A_2v_1 par exemple, sera une solution de $A_1z = 0$; car, d'après le théorème de Jacobi :

$$A_1A_2v_1 = A_2A_1v = A_20 = 0.$$

(*) Nous avons employé des parenthèses pour indiquer qu'il y a une différence entre les p et les $\frac{dz}{dx}$ qui entrent dans les équations dont nous nous occupons ici. Si z était exprimé au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, on aurait

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\delta z}{\delta x},$$

suivant les notations que nous avons adoptées.

Donc $A_2 v$ est une fonction des solutions $x_2, x_3, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n$.

La première équation se réduit dans le cas actuel à

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right) = 0,$$

ce qui prouve que le changement de variable a fait disparaître explicitement x_1 de la valeur de z.

Il résulte de ce qui précède que la substitution des variables

$$x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_n,$$

à

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n,$$

transforme le système donné des m équations à $(m + n)$ variables, en un système équivalent de $(m - 1)$ équations à $(m - 1 + n)$ variables et de même forme.

On pourra effectuer une transformation semblable sur le nouveau système et de proche en proche arriver à une seule équation linéaire à $(n + 1)$ variables.

93. *Exemple* (*). Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$2x_2 x_4^2 \frac{dv}{dx_1} + x_3^2 x_4 \frac{dv}{dx_4} - x_3^2 v = 0,$$

$$2x_2 \frac{dv}{dx_2} - x_4 \frac{dv}{dx_4} - v = 0,$$

$$x_2 x_4^2 \frac{dv}{dx_3} + x_1 x_3 x_4 \frac{dv}{dx_4} - x_1 x_3 v = 0.$$

(*) Collet, Annales de l'école normale, etc., § 10, pp. 53-57. Les équations ne sont pas homogènes par rapport aux quantités p comme dans la théorie générale, mais il est clair que cette circonstance ne complique en rien les calculs.

Méthode générale. Posons $v = e^z$, ce qui fera disparaître v de l'équation; on aura :

$$H_1 = 2x_2x_4^2p_1 + x_3^2x_4p_4 - x_3^2 = 0,$$
$$H_2 = 2x_2p_2 - x_4p_4 - 1 = 0,$$
$$H_3 = x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 - x_1x_3 = 0.$$

On trouve aisément :

$$(H_1, H_2) = 0, \quad (H_2, H_3) = 0, \quad (H_3, H_1) = 0.$$

On tire des équations données :

$$p_1 = -\frac{x_3^2}{2x_2x_4}p_4 + \frac{x_3^2}{2x_2x_4^2},$$
$$p_2 = \quad \frac{x_4}{2x_2}\,p_4 + \frac{1}{2x_2},$$
$$p_3 = -\frac{x_1x_3}{x_2x_4}\,p_4 + \frac{x_1x_3}{x_2x_4^2}.$$

Les équations auxiliaires

$$(p_1 - \psi_1, f) = 0, \quad (p_2 - \psi_2, f) = 0, \quad (p_3 - \psi_3, f) = 0,$$

sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_3^2}{2x_2x_4}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_3^2}{2x_2x_4^3}(x_4p_4 - 2)\frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_4}{2x_2}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{p_4}{2x_2}\frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4^3}(x_4p_4 - 2)\frac{\partial f}{\partial p_4} = 0.$$

La seconde de ces équations admet la solution.

$$\theta_1 = p_4x_4.$$

En substituant cette valeur dans le premier membre de la troisième équation à la place de f, on trouve une autre solution :

$$\theta_2 = \frac{2x_1x_3}{x_2x_4^2}(x_4p_4 - 1).$$

Faisant la même chose avec θ_2, on trouve une troisième solution

$$\theta_3 = \frac{2x_1}{x_2 x_4^2}(x_4 p_4 - 1) = \frac{\theta_2}{x_3}\cdot$$

Une fonction $\theta(x_3, \theta_1, \theta_2)$ sera aussi une solution de la seconde équation; pour satisfaire à la troisième, il faudra que l'on ait :

$$\frac{d\theta}{dx_3} + \frac{d\theta}{d\theta_1}\theta_2 + \frac{d\theta}{d\theta_2}\theta_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{dx_3} + \frac{d\theta}{d\theta_1}\theta_2 + \frac{d\theta}{d\theta_2}\frac{\theta_2}{x_3} = 0.$$

Cette équation a pour solution :

$$\theta_1' = \frac{\theta_2}{x_3} = \theta_3 = \frac{2x_1(x_4 p_4 - 1)}{x_2 x_4^2}.$$

On trouve une autre solution commune, en portant cette valeur θ_1' dans la première des équations auxiliaires. Il vient $\theta_2' = \theta_1' : x_1$. Une fonction $\theta(x_1, \theta_1')$ sera une solution des trois équations, si l'on a :

$$\frac{d\theta}{dx_1} + \frac{d\theta}{d\theta_1'}\frac{\theta_1'}{x_1} = 0.$$

Donc enfin la solution commune sera

$$\frac{\theta_1'}{x_1} = 4a = \frac{2(x_4 p_4 - 1)}{x_2 x_4^2}.$$

On trouve alors :

$$p_1 = -ax_3^2, \quad p_2 = \frac{1}{x_2} + ax_4^2, \quad p_3 = -2ax_1x_3, \quad p_4 = \frac{1}{x_4} + 2ax_2x_4,$$

$$z = \mathrm{l}b + a(x_2x_4^2 - x_1x_3^2) + \mathrm{l}x_2x_4,$$

$$v = bx_2x_4e^{a(x_2x_4^2 - x_1x_3^2)}.$$

Méthode de Boole. Soit $z = 0$, la solution commune des équa-

tions données. On aura, d'après la transformation du n° 2, au lieu des équations données, en faisant $v = x_5$,

$$A_1 z = 2x_2 x_4^2 \frac{dz}{dx_1} + x_3^2 x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_3^2 x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0,$$

$$A_2 z = 2x_2 \frac{dz}{dx_2} - x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0,$$

$$A_3 z = x_2 x_4^2 \frac{dz}{dx_3} + x_1 x_3 x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_1 x_3 x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0.$$

La première de ces équations a pour solutions :

$$u_1 = \frac{x_5}{x_4},\ u_2 = x_2,\ u_3 = x_3,\ u_4 = \frac{x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2}{x_2}.$$

Prenons pour nouvelles variables x_1, u_1, u_2, u_3, u_4, et le système se réduira aux deux équations :

$$(A_2 x_1)\frac{dz}{dx_1} + (A_2 u_1)\frac{dz}{du_1} + (A_2 u_2)\frac{dz}{du_2} + (A_2 u_3)\frac{dz}{du_3} + (A_2 u_4)\frac{dz}{du_4} = 0,$$

$$(A_3 x_1)\frac{dz}{dx_1} + (A_3 u_1)\frac{dz}{du_1} + (A_3 u_2)\frac{dz}{du_2} + (A_3 u_3)\frac{dz}{du_3} + (A_3 u_4)\frac{dz}{du_4} = 0$$

Mais on a :

$$A_2 x_1 = 0,\ A_2 u_1 = 2u_1,\ A_2 u_2 = 2x_2,\ A_2 u_3 = 0,\quad A_2 u_4 = -2u_4,$$
$$A_3 x_1 = 0,\ A_3 u_1 = 0,\quad A_3 u_2 = 0,\quad A_3 u_3 = x_2 x_4^2,\ A_3 u_4 = 0.$$

Le système devient donc :

$$u_1 \frac{dz}{du_1} + x_2 \frac{dz}{dx_2} - u_4 \frac{dz}{du_4} = 0,\quad \frac{du}{dx_3} = 0.$$

On trouve comme solutions distinctes de la première, les fonctions

$$z_1 = \frac{u_1}{x_2},\quad z_2 = x_2 u_4,$$

qui satisfont aussi à la seconde. Il en sera de même de

$$\frac{u_1}{x_2} = F(x_2 u_4),$$

qui donne l'intégrale la plus générale du système des équations données, savoir :

$$x_5 \text{ ou } v = x_2 x_4 \, F\,(x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2).$$

Ce résultat s'accorde avec celui qui est donné par la méthode générale (*).

(*) Collet (Annales de l'école norm., p. 57) traite encore les exemples suivants :

1° $$(x_4^2 - x_3^2)\frac{dz}{dx_1} - (x_1 x_3 - x_2 x_4)\frac{dz}{dx_3} + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\frac{dz}{dx_4} = 0,$$

$$(x_4^2 - x_3^2)\frac{dz}{dx_2} + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\frac{dz}{dx_3} + (x_1 x_3 - x_2 x_4)\frac{dz}{dx_4} = 0.$$

Intégrale générale :

$$z = F\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad x_1 x_2 + x_3 x_4).$$

2° $$x_1 \frac{dz}{dx_1} - x_2 \frac{dz}{dx_2} + x_2 \frac{dz}{dx_3} - x_4 \frac{dz}{dx_4} = 0,$$

$$x_3 \frac{dz}{dx_1} + x_4 \frac{dz}{dx_2} - x_1 \frac{dz}{dx_3} - x_2 \frac{dz}{dx_4} = 0.$$

Intégrale générale :

$$z = F\left[(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2), \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_2 x_3 - x_1 x_4}\right].$$

Imschenetsky, n° 108, p. 138-141, traite les équations suivantes :

$$p_1 + (x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3)\, p_3 + (x_2 + x_3 - 3x_1)\, p_4 = 0,$$
$$p_2 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\, p_3 + (x_3 x_4 - x_2)\, p_4 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = F\left(x_3 - x_1^3 - x_1 x_4 - \frac{x_2^2}{2}\right).$$

Graindorge, n° 84, pp. 85-87, donne l'exemple suivant :

$$2x_3 p_4 + x_1^2 p_3 = 0,$$
$$x_1^2 p_1 - 2x_3 p_2 + (x_1^2 x_4 - 2x_3)\, p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0.$$

Intégrale complète :

$$2z + a x_1^2 x_4 - a x_3^2 + b = 0.$$

Il donne aussi, n° 85, pp. 87-89, l'exemple d'Imschenetsky.

CHAPITRE VI.

MÉTHODE DE MAYER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI (*).

—

§ 26. *Intégration des systèmes d'équations totales linéaires intégrables complètement.*

94. *Correspondance entre les systèmes simultanés d'équations linéaires et certains systèmes d'équations différentielles totales* (**). Toute équation linéaire aux dérivées partielles est équivalente, comme on le sait, à un certain système d'équations différentielles ordinaires (n° 32). Une correspondance analogue existe entre un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et certains systèmes d'équations différentielles totales.

(*) MAYER, Mathematische Annalen, t. V, pp. 448-470 : *Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.* LIE a comparé la méthode de Mayer à la sienne, dans les Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 25, pp. 474-476. MAYER cite comme lui ayant été utiles pour établir sa méthode, ou comme ayant quelque rapport avec elle, outre les recherches de BOOLE : NATANI, *Ueber totale und partieller Differentialgleichungen* (Journal de Crelle, t. LVIII, pp. 301-328), et une note de DU BOIS-REYMOND (*ibid.*, t. LXX, p. 312).

(**) BOOLE, Treatise, etc., Supplement, chap. XXV, pp. 74 et suivantes, s'occupe de ces systèmes. L'analogie de sa méthode, exposée plus haut, avec celle de Mayer, est évidente. Mais MAYER a eu de plus l'idée d'introduire les valeurs initiales des variables, comme l'a fait CAUCHY. [Le second cahier du tome LVI des Archives de Grunert, qui a paru seulement en avril ou en mai 1874, contient, pp. 163-174, un travail intitulé : *Zur Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung,* von L. ZAJĄCRKOWSKI, où l'auteur expose, comme complément de la méthode de BOOLE, précisément ce que nous résumons, d'après MAYER, dans les nos 94, 95, 96; seulement, il démontre directement tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité.]

Soient, en effet, les m équations suivantes :

$$A_1 z = \frac{dz}{dx_1} + a_{11}\frac{dz}{dy_1} + a_{12}\frac{dz}{dy_2} + \cdots + a_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad . \; . \; . \quad (1_1)$$

. . . .

$$A_m z = \frac{dz}{dx_m} + a_{m1}\frac{dz}{dy_1} + a_{m2}\frac{dz}{dy_2} + \cdots + a_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad . \; . \; . \quad (1_m)$$

z et les a étant fonction des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$.

Multiplions ces équations par des quantités quelconques $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et ajoutons les résultats, nous trouverons :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 A_1 z + \cdots + \lambda_m A_m z \\ = & \lambda_1 \frac{dz}{dx_1} + \cdots + \lambda_m \frac{dz}{dx_m} + \\ & \frac{dz}{dy_1}(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1}) + \\ & \ldots \ldots \ldots \\ & \frac{dz}{dy_n}(\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}) = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2) \end{aligned}$$

Toute solution des équations (1) est une solution de (2) et, par suite, égalée à une constante, est aussi une solution des équations simultanées suivantes, qui correspondent à l'équation (2) :

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \cdots = \frac{dx_m}{\lambda_m} = \frac{dy_1}{\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1}} = \cdots = \frac{dy_n}{\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}},$$

ou encore des équations différentielles totales que l'on en déduit :

$$dy_1 = a_{11}dx_1 + a_{21}dx_2 + \cdots + a_{m1}dx_m, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_1)$$

$$dy_2 = a_{12}dx_1 + a_{22}dx_2 + \cdots + a_{m2}dx_m, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_2)$$

. . . .

$$dy_n = a_{1n}dx_1 + a_{2n}dx_2 + \cdots + a_{mn}dx_m. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_n)$$

Réciproquement, si une fonction z est telle que sa différentielle est identiquement nulle en vertu des équations (3), il est clair que cette fonction est une solution des équations (1).

Il résulte de là que l'intégration des systèmes de forme (1) est équivalente à celle des systèmes de forme (3) et réciproquement.

CLEBSCH ayant montré que, dans l'étude des systèmes de forme (1), on peut se borner à ceux qui sont tels que

$$A_i A_h f - A_h A_i f = 0,$$

on peut aussi, comme on va le voir, se borner à étudier certains systèmes (3).

95. *Conditions nécessaires d'intégrabilité complète* (*unbeschränkte Integrabilität*). Nous ne considérons ici que les systèmes (3) qui proviennent d'un système de n équations entre $(n + m)$ variables, de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \text{constante},$$

par différentiation totale. Il résulte de là que les équations (3) que nous considérons, peuvent être regardées comme ayant pour solutions n fonctions y de $x_1, \ldots, x_m$ et de n constantes arbitraires. On a donc :

$$\frac{\delta y_k}{\delta x_h} = a_{hk}, \quad \frac{\delta y_k}{\delta x_i} = a_{ik}, \qquad (4)$$

et par conséquent :

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} - \frac{da_{ik}}{dx_h} = 0. \qquad (5)$$

Nous employons ici le signe d pour la différentiation, parce que les a contiennent à la fois les x et les y. On remarque que

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = \frac{\delta a_{hk}}{\delta x_i} + \frac{\delta a_{hk}}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_i} + \cdots + \frac{\delta a_{hk}}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_i};$$

c'est-à-dire, d'après (4) :

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = \frac{\delta a_{hk}}{\delta x_i} + a_{i1}\frac{\delta a_{hk}}{\delta y_1} + \cdots + a_{in}\frac{\delta a_{hk}}{\delta y_n},$$

ou encore, en tenant compte de la signification du symbole d'opération A_i

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = A_i(a_{hk}).$$

Par conséquent, les conditions (5) peuvent s'écrire sous la forme

$$A_i(a_{hk}) - A_h(a_{ik}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Les conditions (5) ou (5′) sont en nombre $n.\frac{m(m-1)}{2}$. Elles doivent être satisfaites identiquement par les valeurs des y, puisque celles-ci contiennent n constantes arbitraires.

Les conditions (5) ou (5′) sont donc nécessaires pour que le système (3) ait un système intégral de la forme indiquée. Nous dirons que ces conditions définissent un système (3) *complétement intégrable*. On verra plus bas qu'elles sont suffisantes pour que l'intégration soit possible.

On peut remarquer que les conditions (5′) donnent

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[A_i(a_{hk}) - A_h(a_{ik})\right] \frac{dz}{dy_k} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

pour une fonction z quelconque. Mais on a (§ 17, n° 58) :

$$(A_iA_h - A_hA_i)\, z = \Sigma \left[A_i(a_{hk}) - A_h(a_{ik})\right] \frac{dz}{dy_k}.$$

Donc les conditions (5) entraînent les suivantes :

$$A_iA_hz - A_hA_iz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Réciproquement si celles-ci existent pour n fonctions z distinctes, il est clair qu'elles peuvent remplacer les conditions (5) ou (5′), d'après la théorie des déterminants.

96. *Réduction du système* (3) *à* m *systèmes de* n *équations ordinaires du premier ordre.* S'il y a vraiment n fonctions y qui satisfont aux équations (3), elles devront satisfaire en particulier aux n équations (4) suivantes :

$$\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = a_{11}, \frac{\delta y_2}{\delta x_1} = a_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta x_1} = a_{1n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_1)$$

où $x_2, \ldots, x_m$ jouent le rôle de constantes. Soient

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_1, \quad \ldots \ldots \quad (8_1)$$

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_2, \quad \ldots \ldots \quad (8_2)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_n, \quad \ldots \ldots \quad (8_n)$$

le système intégral de (4_1), où $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne contiennent que $x_2, \ldots, x_m$.

On peut se servir de ces équations pour effectuer un changement de variables, consistant à remplacer $y_1, \ldots, y_n$ par $c_1, \ldots, c_n$. Il est facile de former les équations différentielles totales qui doivent remplacer le système (5). On tire en effet de (8) :

$$\begin{aligned} dc = & \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_1} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_1} + \cdots + \frac{d\varphi}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_1}\right) dx_1 \\ & + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_2} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_2} + \cdots + \frac{\delta\varphi}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_3}\right) dx_2 \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_m} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_m} + \cdots + \frac{\delta\varphi}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_m}\right) dx_m ; \end{aligned}$$

ou encore

$$dc = \sum_1^m \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x_h} + a_{h1}\frac{\delta\varphi}{\delta y_1} + \cdots + a_{hn}\frac{\delta\varphi}{\delta y_n}\right) dx_h.$$

Les fonctions φ étant, par hypothèse, les solutions de (4), on a $\frac{d\varphi}{dx_1} = 0$, et par conséquent les équations précédentes se réduisent aux suivantes, où nous employons le symbole d'opération A,

$$dc_1 = \sum_2^m A_h\varphi_1 dx_h, \quad \ldots \ldots \quad (9_1)$$

$$dc_2 = \sum_2^m A_h\varphi_2 dx_h, \quad \ldots \ldots \quad (9_2)$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$dc_n = \sum_2^m A_h\varphi_n dx_h \quad \ldots \ldots \quad (9_n)$$

Il est clair, d'ailleurs, que x_1 ne peut plus entrer dans ces équations puisque les c ne contiennent pas cette variable. On peut le montrer encore comme suit. On a, à cause de $A_1\varphi = 0$

$$A_1 A_h \varphi = A_h A_1 \varphi = 0,$$

ou encore,

$$\frac{d(A_h\varphi)}{dx_1} + a_{11}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_1} + a_{12}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_2} + \cdots + a_{1n}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_n} = 0;$$

ce qui revient à dire qu'après substitution des valeurs de $y_1, \ldots, y_n$ dans $A_h\varphi$ la dérivée totale de $A_h\varphi$ par rapport à $x_1 = 0$. Il résulte de là qu'après la substitution dont il s'agit, les équations (9) ne contiennent plus x_1.

On peut donc, sans inconvénient, mettre à la place de x_1 *telle valeur particulière que l'on veut, sans que les équations* (9) *changent.*

On voit que la transformation que nous venons d'effectuer remplace le système (3) par un autre contenant un nombre égal d'équations et une variable indépendante de moins. On peut remplacer le système (9) par un système analogue contenant encore une variable x de moins et ainsi de suite, car le système (9) est évidemment complétement intégrable, puisqu'il est équivalent à (3). On voit donc qu'en continuant de cette manière, on peut ramener l'intégration de (3) à celle de m systèmes de n équations analogues aux équations (3).

97. *Détermination de ces systèmes successifs.* Si l'on introduit les valeurs initiales des variables y comme constantes, on peut établir immédiatement les m systèmes dont nous avons parlé à la fin du numéro précédent. Nous appellerons $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ ces valeurs initiales correspondant à $x_1 = x_{10}$.

Pour le montrer, nous résoudrons les équations (8) par rapport à $y_1, \ldots, y_n$. Nous trouverons ainsi

$$y_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_m, c_1, \ldots, c_n), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_m, c_1, \ldots, c_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10_n)$$

Si l'on suppose que les c soient déterminés d'une manière convenable en fonction de $x_2, \ldots, x_m$, ces équations donneront la solution des équations (3), et, par suite, on trouvera les n relations équivalentes aux équations (9) :

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\delta\psi_1}{\delta c_n} dc_n = \left(a_{21} - \frac{\delta\psi_1}{\delta x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{m1} - \frac{\delta\psi_1}{\delta x_m}\right) dx_m, \quad (11_1)$$

. . . .

$$\frac{\delta\psi_n}{\delta c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\delta\psi_n}{\delta c_n} dc_n = \left(a_{2n} - \frac{\delta\psi_n}{\delta x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{\delta\psi_n}{\delta x_m}\right) dx_m. \quad (11_n)$$

Les x_1 n'entreront pas dans ces équations équivalentes à (9), et les dx_1 en ont disparu aussi à cause de cette équivalence. On peut voir directement d'ailleurs que dx_1 devait disparaître des équations (11). En effet, les ψ étant des solutions du système (4_1), on a

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta x_1} - a_{11} = 0, \quad \frac{\delta\psi_2}{\delta x_1} - a_{12} = 0, \ldots, \frac{\delta\psi_n}{\delta x_1} - a_{1n} = 0.$$

Introduisons maintenant les valeurs initiales comme constantes. Posons

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x_{10}, x_2, \ldots, x_m, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = c_1,$$

et déduisons des n relations contenues dans cette équation :

$$y_1 = \chi_1(x_1, \ldots, x_m, y_{10}, \ldots, y_{n0}), \quad \ldots\ldots \quad (10'_1)$$

. . . .

$$y_n = \chi_n(x_1, \ldots, x_m, y_{10}, \ldots, y_{n0}). \quad \ldots\ldots \quad (10'_n)$$

On aura, pour ces fonctions χ comme pour les ψ :

$$\frac{\delta\chi_1}{\delta y_{10}} dy_{10} + \cdots + \frac{\delta\chi_1}{\delta y_{n0}} dy_{n0} = \left(a_{21} - \frac{\delta\chi_1}{\delta x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{m1} - \frac{\delta\chi_1}{\delta x_m}\right) dx_m, \quad (11'_1)$$

. . . .

$$\frac{\delta\chi_n}{\delta y_{10}} dy_{10} + \cdots + \frac{\delta\chi_n}{\delta y_{n0}} dy_{n0} = \left(a_{2n} - \frac{\delta\chi_n}{\delta x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{\delta\chi_n}{\delta x_m}\right) dx_m; \quad (11'_1)$$

équations qui sont indépendantes de x_1, comme les équations

équivalentes (11) ou (9). Faisons-y $x_1 = x_{10}$, elles ne changeront pas. Dans cette hypothèse, χ_1 se réduit à $y_{10}, \ldots, \chi_n$ à y_{n0} et, par suite, le système (11′) est remplacé par celui-ci :

$$dy_{10} = a_{210}dx_2 + a_{310}dx_3 + \cdots + a_{m10}dx_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12_1)$$

. . . .

$$dy_{n0} = a_{2n0}dx_2 + a_{3n0}dx_3 + \cdots + a_{mn0}dx_m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12_n)$$

On a ajouté un 0 aux indices a pour indiquer que l'une des variables x_1 y a été remplacée par sa valeur initiale x_{10}.

Il est clair que ce système (12) est encore complétement intégrable. En effet, il a pour solutions le système intégral du premier. On sait d'ailleurs que les conditions d'intégrabilité (5) ou (5′) étant identiquement satisfaites pour une valeur quelconque de x, le sont encore pour la valeur spéciale x_{10}.

Il est facile d'écrire les systèmes successifs de n équations si l'on convient d'ajouter les indices $1, 2, 3, \ldots, (m-1)$, aux indices des quantités y et a pour indiquer que l'on y remplace successivement $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ par leurs valeurs initiales, mais cela est inutile, comme nous allons le montrer.

98. *Réduction de l'intégration des* m *systèmes auxiliaires de* n *équations à celle d'un seul système.* Il y a un cas où l'on parvient immédiatement à terminer l'intégration. C'est celui où la valeur spéciale de x_1, savoir x_{10}, est telle que pour cette valeur, tous les a qui entrent encore dans les équations (12) s'annulent. Dans ce cas, le système (12) donne

$$y_{10} = \text{constante}, \ldots, y_{n0} = \text{constante},$$

le problème est complétement résolu et il est inutile d'effectuer aucune transformation ultérieure.

Nous allons montrer que l'on peut dans tous les cas, par un changement convenable de variables indépendantes, faire en sorte que cette simplification se produise. Posons

$$x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_m), \quad \ldots, x_m = x_m(u_1, \ldots, u_m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Le système (5) deviendra :

$$dy_1 = b_{11}du_1 + b_{21}du_2 + \cdots + b_{m1}du_m, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14_1)$$

. . . .

$$dy_n = b_{1n}du_1 + b_{2n}du_2 + \cdots + b_{mn}du_m, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14_n)$$

où :

$$b_{11} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_1} a_{i1}, \ldots, b_{m1} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_m} a_{i1}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (15_1)$$

. . . .

$$b_{1n} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_1} a_{in}, \ldots, b_{mn} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_m} a_{in}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (15_n)$$

Ce système nouveau (14) sera complétement intégrable, puisque son système intégral se déduit de celui de (5). De même, si l'on pose

$$B_i z = \frac{\delta z}{\delta u_i} + \sum_{j=1}^{j=n} b_i \frac{dz}{du_j},$$

on aura :

$$B_i B_h z - B_h B_i z = 0,$$

ce qu'on vérifie aisément d'ailleurs par le calcul.

Pour intégrer (14), nous cherchons d'abord le système intégral des équations

$$\frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{11}, \quad \frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta u_1} = b_{1n}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (16)$$

et nous y ferons entrer les valeurs initiales $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ qui correspondent à la valeur u_{10} de u_1. Le système (14) sera remplacé alors par

$$dy_{10} = b_{210}du_2 + \cdots + b_{m10}du_m, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (17_h)$$

. . . .

$$dy_{n0} = b_{2n0}du_2 + \cdots + b_{mn0}du_m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (17_n)$$

Choisissons maintenant les équations (15) qui définissent la substitution de telle manière que l'on ait

$$dy_{10} = 0, dy_{20} = 0, \ldots, dy_{n0} = 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18)$$

Pour cela, posons simplement

$$x_1 = x_{10} + (u_1 - u_{10}) v_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = x_{m0} + (u_1 - u_{10}) v_m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_m)$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ étant des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ qui laissent les variables x vraiment indépendantes, $x_{10}, \ldots, x_{m0}$ d'ailleurs étant choisis de manière que les a restent finis et déterminés, enfin, tels que l'hypothèse $u_1 = u_{10}$ ne rendant infinie aucune des fonctions v. On aura pour b_{hk} quelconque, h étant supérieur à 1 :

$$b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} a_{ik}.$$

Donc, pour $u_1 = u_{10}$, $b_{hk} = 0$. Les équations (17) se réduiront donc aux équations (18). Ensuite, on aura

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_k + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} a_{ik},$$

expression qui ne devient ni nulle ni infinie pour $u = u_{10}$, et par suite les équations (16) ne prennent pas une forme illusoire.

La solution du système (3) est donc ramenée à celle des équations (16). On fera entrer dans le système intégral de (16) les valeurs initiales des y quand $u_1 = u_{10}$. On aura ainsi, avec les équations (13'), $2n$ équations entre les x, les y et les u. Éliminant les u, on aura le système intégral de (3).

Remarque. La forme la plus simple des équations (13') est celle-ci

$$x_1 = u_1,$$

$$x_2 = x_{20} + (u_1 - u_{10}) u_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_{n0} + (u_1 - u_{10}) u_n,$$

les constantes étant choisies de manière que les a ne soient pas infinis pour $u_1 = u_{10}$. On a, dans ce cas,

$$b_{1k} = a_{1k} + u_2 a_{2k} + \cdots + u_m a_{mk},$$
$$b_{ik} = (u_1 - u_{10})\, a_{ik},$$

ce qui montre que l'on peut transformer les équations données, d'une manière très-simple.

§ 27. *Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

99. *Intégration complète d'un système de Jacobi.* Considérons maintenant les équations :

$$A_1 z = \frac{dz}{dx_1} + a_{11}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + a_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m z = \frac{dz}{dx_m} + a_{m1}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + a_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1_n)$$

Pour en trouver le système intégral, nous le transformerons, par les substitutions

$$x_1 = x_{10} + (u_1 - u_{10})\, v_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m = x_{m0} + (u_1 - u_{10})\, v_m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_n)$$

en celui-ci :

$$B_1 z = \frac{dz}{du_1} + b_{11}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + b_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1'_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_m z = \frac{dz}{du_m} + b_{m1}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + b_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1'_n)$$

où l'on a :

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_k + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} a_{ik},$$
$$b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} a_{ik}.$$

Cela posé, on cherchera le système intégral des équations :

$$\frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{11}, \quad \frac{\delta y_2}{\delta u_1} = b_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta u_1} = b_{1n}, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

et l'on exprimera les constantes en fonctions des valeurs initiales $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ des variables y pour $u_1 = u_{10}$. Ce système intégral sera en même temps celui des équations différentielles totales :

$$dy_1 = b_{11} du_1 + b_{21} du_2 + \cdots + b_{m1} du_m, \quad \ldots \ldots \quad (14_1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$dy_n = b_{1n} du_1 + b_{2n} du_2 + \cdots + b_{mn} du_n, \quad \ldots \ldots \quad (14_n)$$

si l'on regarde $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ comme des constantes. Tirons des équations qui donnent ce système intégral les valeurs de $y_{10}, \ldots, y_{n0}$. Les équations ainsi trouvées

$$y_{10} = F_1(u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots \ldots \quad (18_1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$y_{n0} = F_n(u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots \ldots \quad (18_n)$$

satisfont encore au système (14), et par conséquent, d'après la correspondance qui existe entre les systèmes (14) et (1'), ces équations (18) constituent le système intégral de (1'). Éliminons-en $u_1, \ldots, u_m$ par la substitution inverse de (15) et nous aurons la solution complète du système (1).

Remarque. Les systèmes (1) doivent rarement être intégrés complétement. En général, on n'a besoin que d'une seule solution des systèmes de ce genre. Il est donc de la plus haute importance de montrer comment l'on peut déduire *une* seule solution de (1) d'*une* seule solution des équations (16).

100. *Théorème de Mayer* (*). *On peut déduire une solution du système* (1') *de chaque solution du système* (16). Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n) = \text{constante}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

(*) Lie, dans les Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 25, p. 475, a très-bien fait remarquer toute l'importance de ce théorème de Mayer, qu'il n'avait pas rencontré dans le développement naturel de sa propre méthode. Au fond, ce théorème est une traduction, pour les systèmes ici considérés, du théorème de Poisson, ou mieux de Jacobi.

une solution du système (16). Si l'on considère les solutions

$$y_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_n, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \quad \dots \dots \quad (20_1)$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$y_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_n, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}), \quad \dots \dots \quad (20_n)$$

de ce système (16), on sait que, pour $u_1 = u_{10}$, les quantités $y_1, \dots, y_n$ deviendront $y_{10}, \dots, y_{n0}$. Donc, pour $u_1 = u_{10}$, on aura :

$$U = F(u_1, u_2, \dots, u_m, y_1, \dots, y_n) - F(u_{10}, u_2, \dots, u_m, y_{10}, \dots, y_{n0}) = 0, \quad (21)$$

lorsque les y sont remplacés par leurs valeurs dans F.

D'après ce que l'on a vu plus haut, si l'on regarde $y_{10}, \dots, y_{n0}$ comme des constantes, les relations (20) satisfont aux équations (14), ou aux équations

$$\frac{\delta y_k}{\delta u_h} = b_{hk}.$$

Or, on déduit de (21), dans la même hypothèse :

$$\frac{\delta U}{\delta u_h} + \frac{\delta U}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta u_h} + \dots + \frac{\delta U}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta u_h} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\delta U}{\delta u_h} + \frac{\delta U}{\delta y_1} b_{h1} + \dots + \frac{\delta U}{\delta y_n} b_{hn} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$B_h U = 0.$$

On peut encore arriver à ce résultat, au moyen de l'équation $B_1 F = 0$, identique par hypothèse. En effet, on a

$$B_1(B_h U) = B_h(B_1 U) = B_h(B_1 F) = 0$$

Donc $B_h U$, quand on y substitue les valeurs (20), a, comme U, une valeur indépendante de u_1. Mais pour $u_1 = u_{10}$, comme $y_1, \dots, y_n$ deviennent $y_{10}, \dots, y_{n0}$, U est nul et par suite $B_h U$ aussi.

Ainsi la fonction U est telle que l'on a :

$$B_1 U = 0, \quad B_2 U = 0, \dots, B_m U = 0, \quad \dots \dots \quad (22)$$

quand on y remplace les y par leurs valeurs (20); de plus, par hypothèse, la première des équations (22) est identiquement satisfaite. Mettons maintenant l'équation (21) sous la forme

$$y_{10} = U_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

On aura, à cause de (22), identiquement encore :

$$B_1 U_1 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

puis,

$$B_2 U_1 = 0, \quad B_3 U_1 = 0, \ldots, B_m U_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

quand on substitue les valeurs (20) aux y. Aucune de ces équations (25) ne peut être une conséquence de (23), parce qu'elles ne contiennent pas y_{10}. Il peut se présenter deux cas. Ou bien toutes les équations (25) seront identiquement satisfaites comme (24); alors U_1 est une solution commune cherchée des équations $Bz = 0$. Ou bien, on pourra en déduire encore $y_{20}, \ldots, y_{h0}$ en fonction des u, des y et des constantes restantes. S'il en est ainsi, on opérera sur les nouvelles valeurs trouvées comme sur (23). En continuant toujours de cette manière, ou bien on trouvera une solution commune des équations $Bz = 0$, ou bien on arrivera à exprimer toutes les valeurs des y_0 en fonction des y et de u, et les équations ainsi trouvées seront équivalentes aux équations (20) qui donnent la solution complète des équations (14) et par suite des équations (1′) ou (1) elles-mêmes.

101. *Application à l'intégration des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi.* La méthode de Jacobi, appliquée aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, ramène l'intégration de celle-ci à celles de systèmes linéaires de la forme :

$$A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \ldots, \quad A_\mu f = 0,$$

où

$$A_h f = \frac{\delta f}{\delta x_h} + \sum_{\mu+1}^{\nu} \left(\frac{\delta p_h}{\delta x_i} \frac{\delta f}{\delta p_i} - \frac{\delta p_h}{\delta p_i} \frac{\delta f}{\delta x_i} \right) = 0,$$

ν étant le nombre des variables de l'équation aux dérivées par-

tielles donnée, et par suite $(2\nu - \mu)$ étant le nombre des variables indépendantes contenues dans le système Af, savoir :

$$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_\nu, p_{\mu+1}, \ldots, p_\nu.$$

En appliquant la théorie précédente, on devra faire

$$m = \mu, \quad n = 2(\nu - \mu).$$

Pour trouver une intégrale du système Af, il faudra donc en trouver une d'un système de $2(\nu - \mu)$ équations ordinaires.

La méthode de Jacobi conduit à $\nu(\nu - 1)$ systèmes auxiliaires, contenant respectivement 2, 4, 6, ..., $2(\nu - 1)$ équations. Donc la méthode de Mayer pour intégrer une équation aux dérivées partielles nécessitera seulement la recherche d'une intégrale unique de

1 système de $2(\nu - 1)$ équations différentielles ordinaires,
1 » $2(\nu - 2)$ » »
1 » $2(\nu - 3)$ » »
. . . .
1 système de 4 équations différentielles ordinaires,
1 » 2 » »

On arrive à ce résultat en faisant $\mu = 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$, dans la conclusion donnée plus haut. On remarquera que la méthode la plus favorable, celle de Weiler et Clebsch, exige un nombre presque double d'intégrations (voir n° 87).

LIVRE III.

MÉTHODE DE CAUCHY ET DE LIE.

CHAPITRE I.

EXPOSITION GÉNÉRALE. TRAVAUX DE CAUCHY (*).

---

§ 28. ***Cas des équations à deux variables indépendantes.***

102. *Idée générale de la méthode de Cauchy, dans le cas des équations à deux variables indépendantes.* Considérons l'équation :

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et supposons que x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 soient les valeurs initiales de x, y, z, p, q liées entre elles par l'équation :

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) CAUCHY. Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. II, pp. 238-272. Le § I que nous analysons ici est la reproduction d'un article publié, en janvier et février 1819, dans le Bulletin de la Société philomatique. L'examen du cas spécial où la méthode de Cauchy est en défaut, a été fait par SERRET, dans les Comptes rendus, t. LIII, pp. 598-606, 734-745, ou Annales de l'école normale supérieure, t. III, pp. 145-161. C'est BERTRAND, qui a signalé dans les Comptes rendus, t. XLV, pp. 617-619, l'existence de ce cas singulier, en prétendant, à tort, selon nous, qu'il se confondait avec le cas général. OSSIAN BONNET (C. R. t. LXV, pp. 581-585) a donné une démonstration de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui permet d'éviter la difficulté signalée par Bertrand. La méthode de Cauchy est aussi exposée dans IMSCHENETSKY, pp. 191-200. Il renvoie pour les travaux de Serret à la 6me édi-

Soit u une fonction de x et de y; on pourra imaginer que y, z, p, q soient exprimés au moyen de x et de u. Dans cette hypothèse, on aura :

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{dz}{du} = \quad q\frac{dy}{du} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dérivons l'équation (3) par rapport à u, l'équation (4) par rapport à x, et retranchons le second résultat du premier, nous trouverons :

$$\frac{dp}{du} = \frac{dq}{dx}\frac{dy}{du} - \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

On déduit ensuite de l'équation (1) :

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx} + \frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{dx} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dq}{dx} = 0, \quad \ldots \quad (6)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{du} + \frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{du} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{du} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dq}{du} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Substituons dans cette dernière les valeurs de $\frac{dz}{du}$, $\frac{dp}{du}$ tirées de (4) et (5), ou multiplions (4) par $-\frac{\delta f}{\delta z}$, (5) par $-\frac{\delta f}{\delta p}$, et ajoutons-les à (7). Il viendra :

$$\frac{dy}{du}\left(\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z}q + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dq}{dx}\right) + \frac{dq}{du}\left(\frac{\delta f}{\delta q} - \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

tion du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral de* Lacroix, *avec notes* de MM. Hermite et Serret, t. II, pp. 237-282, ouvrage que nous n'avons pu consulter. Voyez aussi Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, pp. 624-649.

Cauchy a ajouté à son premier mémoire de 1819, des notes, à nos yeux, de la plus haute importance, où il généralise sa méthode d'exposition.

Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 364-376, a donné une exposition *a posteriori* de cette méthode ou plutôt celle de Pfaff modifiée par lui; Mayer a montré le moyen de trouver en tout cas une intégrale complète dans le mémoire intitulé : *Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partielle Differentialgleichungen erster ordnung* (Mathematische Annalen, t. III, pp. 435-452). L'exposition générale de la méthode de Cauchy, donnée par lui, en 1841, contient implicitement ces recherches de Mayer.

La fonction u étant encore indéterminée, nous pouvons poser :

$$\frac{\delta f}{\delta q} - \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

ce qui réduira l'équation (8) à :

$$\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} q + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dq}{dx} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Enfin, ajoutons à l'équation (6), l'équation (5) multipliée par $-\frac{\delta f}{\delta z}$, l'équation (10) multipliée par $-\frac{dy}{dx}$, l'équation (9) multipliée par $-\frac{dq}{dx}$, il viendra :

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} p + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Les équations (5), (9), (10), (11) peuvent se mettre sous la forme suivante que nous avons déjà rencontrée (n° 57) :

$$\frac{dx}{\frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{dy}{\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{dz}{p\frac{\delta f}{\delta p} + q\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{-dp}{\frac{\delta f}{\delta x} + p\frac{\delta f}{\delta z}} = \frac{-dq}{\frac{\delta f}{\delta y} + q\frac{\delta f}{\delta z}} \quad \ldots (12)$$

Ainsi, toute solution de l'équation (1) jouit de la propriété suivante : on peut choisir une fonction u de x et de y, telle que les équations (12) soient vérifiées, en même temps que l'équation (4)

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du}. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Il importe de remarquer que le système (12) ne contient que des dérivées par rapport à x; il conduira donc à un système intégral de la forme :

$$y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots (13_1)$$
$$z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots (13_2)$$
$$p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots (13_3)$$
$$q = f_4(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots (13_4)$$

d'où l'on a supposé p_0 éliminé au moyen de la condition (2), et où

u n'entre que dans les constantes de l'intégration de (12), savoir y_0, z_0, q_0. Ces constantes contiendront u de telle sorte que l'équation (4) soit vérifiée.

Réciproquement, tout système intégral (13), des équations (4) et (12), où les valeurs initiales satisfont à la relation (2), donnera une intégrale de l'équation (1), telle que les valeurs initiales satisferont à la même équation (2). La relation entre x, y, z s'obtiendra en éliminant u entre (13_1) et (13_2), et les valeurs de p et de q, trouvées par élimination de u entre (13_1), (13_3) et (13_4) seront précisément $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. En effet, les équations (12) et (4) permettent de remonter aux équations (6) et (7), ou

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \frac{df}{du}=0.$$

On déduit de celle-ci $df = 0$, ou $f =$ constante. Cette constante est nulle à cause de la condition (2). Donc, en premier lieu, les équations (12) satisfont identiquement à la relation (1). Ensuite, on déduit des équations (3) et (4)

$$dz = pdx + qdy.$$

Si donc l'on prend pour variables, x et y, on aura :

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée complétement à celle du système des équations (12) et (4).

103. *Détermination d'une intégrale de* (12) *satisfaisant à* (4). Supposons que l'on ait déterminé le système intégral (13) des équations (12). Par hypothèse, on peut le mettre sous la forme :

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\psi_1(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots \ldots \quad (14_1)$$
$$z = z_0 + (x - x_0)\,\psi_2(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots \ldots \quad (14_2)$$
$$p = p_0 + (x - x_0)\,\psi_3(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots \ldots \quad (14_3)$$
$$q = q_0 + (x - x_0)\,\psi_4(x, y_0, z_0, q_0). \quad \ldots \ldots \quad (14_4)$$

Si ces équations ne satisfont pas identiquement à l'équation (4), on aura

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du} + \mathrm{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

On déduira des équations (4′) et (3), l'équation

$$\frac{dp}{du} = \frac{dq}{dx}\frac{dy}{du} - \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx} + \frac{d\mathrm{I}}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

comme on a trouvé (5) au moyen de (4) et de (3). Les équations (3), (4), (5), (9) et (10) donnent l'identité (7); de la même manière (3), (4′), (5′), (9) et (10) donneront une équation, qui en vertu de (7) deviendra :

$$\mathrm{I}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\mathrm{I}}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

On déduit de celle-ci :

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}} dx}.$$

Pour que I soit nul, il suffira en général que I_0 soit nul. Or, on a :

$$\mathrm{I} = \frac{dz_0}{du} + (x - x_0)\frac{d\psi_2}{du} - \left[q_0 + (x - x_0)\psi_4\right]\left[\frac{dy_0}{du} + (x - x_0)\frac{d\psi_1}{du}\right].$$

Par conséquent, on doit avoir

$$\mathrm{I}_0 = \frac{dz_0}{du} - q_0\frac{dy_0}{du} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

On peut satisfaire à cette équation des deux manières suivantes :

1° Si l'on suppose que

$$z = \varphi y,$$

pour $x = x_0$, on aura

$$z_0 = \varphi y_0, \quad q = \varphi' y_0,$$

et l'équation (16) sera identiquement satisfaite. Dans ce cas, on trouvera l'intégrale générale, en éliminant y_0 et par suite u, entre (13_1) et (13_2) qui deviendront :

$$y_1 = f_1(x, y_0, \varphi y_0, \varphi' y_0), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_1)$$
$$y_2 = f_2(x, y_0, \varphi y_0, \varphi' y_0). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_2)$$

2° On peut prendre pour z_0 et y_0 des constantes arbitraires qui ne contiennent pas u, et q_0 contiendra seul u dans les équations (13). On arrivera dans ce cas à une *solution complète* contenant deux constantes arbitraires z_0 et y_0, en éliminant q_0 entre les valeurs de y et de z (*).

104. *Examen d'une objection de* Bertrand. Bertrand a fait, contre le procédé de démonstration précédent, l'objection très-spécieuse que voici. On pourrait, dit-il, au moyen de ce procédé, prouver que toute fonction φx qui s'annule pour une valeur x_0 de x, s'annule pour toute valeur de x. En effet, posons

$$\pi x = \frac{\varphi' x}{\varphi x}.$$

On aura :

$$\int_{x_1}^{x} \pi x dx = \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi' x}{\varphi x} dx = \log. \frac{\varphi x}{\varphi x_1}.$$

Donc

$$\varphi x = \varphi x_1 e^{\int_{x_1}^{x} \pi x dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Pour $x_1 = x_0$, $\varphi x_1 = \varphi x_0 = 0$, d'où il semble que l'on doive conclure par le raisonnement de Cauchy, que l'on a $\varphi x = 0$, pour toute valeur de x, ce qui est absurde.

Cette objection, très-juste en général, ne nous semble pas applicable au cas spécial traité par Cauchy. La fonction πx, dans l'exemple de Bertrand, est liée de telle manière à la fonction φx que les zéros de celle-ci sont les infinis de celle-là et réciproquement. L'équation (14) prouve que

$$e^{\int_{x_1}^{x} \pi x dx}, \quad \int_{x_1}^{x} \pi x dx, \quad \pi x,$$

convergent vers l'infini, en même temps que x_1 converge vers x_0, ou φx_1 vers φx_0.

(*) Les auteurs cités en tête de ce paragraphe, c'est-à-dire Serret et Imschenetsky, ne se sont pas occupés de ce second cas, pourtant d'une importance capitale, et signalé par Cauchy dans les notes ajoutées, en 1841, à son mémoire primitif de 1819. Cela provient de que ces auteurs font $u = y_0$, tandis qu'il faut laisser à u toute son indétermination afin de pouvoir faire, au besoin, $u = y_0$, ou $u = q_0$.

Dans le cas spécial traité par Cauchy, il n'en est pas de même. Posons :

$$\pi(x, y, z, p, q) = \left(-\frac{\delta f}{\delta z} : \frac{\delta f}{\delta p}\right).$$

Il est clair que cette fonction π, quand on y substitue les valeurs de y, z, p, q données par les équations (15) ne sera pas infinie, pour toute valeur de x, *parce qu'elle contient des constantes arbitraires ou une fonction arbitraire.* Par suite

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx$$

ne peut devenir infinie que si $\pi = \infty$, pour $x = x_0$. En effet, si π était infinie pour une autre valeur, en restreignant suffisamment l'intervalle $(x - x_0)$, cette intégrale serait toujours finie.

Il ne peut donc y avoir d'exception que si l'on a, à la fois,

$$f(x_0, y_0, \varphi y_0, p_0, \varphi' y_0) = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (15)$$

$$\pi(x_0, y_0, \varphi y_0, p_0, \varphi' y_0) = \infty. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (16)$$

Cela ne peut arriver que si l'on prend la forme spéciale de la fonction φ déterminée précisément par ces équations. Dans ces cas particuliers, si π croît indéfiniment, en étant négatif, quand x converge vers x_0, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx$$

sera finie, ou infinie et négative. Dans ces deux cas, on pourra encore conclure $I = 0$ de $I_0 = 0$. Dans le cas contraire, il faudra calculer I directement. Si l'on trouve I différent de zéro, on peut en conclure qu'il n'y a pas de solution telle que pour $x = x_0$, $z = \varphi y$, rien de plus.

Il se peut que l'équation $\pi = \infty$, au lieu de donner une forme de φ pour laquelle on n'ait pas, à coup sûr, $I = 0$, donne au contraire une valeur $x = x_0$, telle qu'il soit douteux que $I = 0$. Dans ce cas, si réellement I n'est pas nul, on doit conclure qu'il n'y a pas de solution qui permette de donner à x la valeur initiale x_0. Ce cas d'exception ne semble pas avoir été signalé.

105. Remarques. I. Dans le cas où l'équation est linéaire et de la forme

$$Pp + Qq = R,$$

les deux premières équations auxiliaires sont celles de Lagrange :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

et elles suffisent pour résoudre complétement la question (§ 5).

II. Si les deux équations (13_1) (13_2) ne contiennent pas q_0, on en déduira :

$$y_0 = \varphi_1(x, y, z), \quad z_0 = \varphi_2(x, y, z);$$

Par suite, à cause de $z_0 = \varphi y_0$, on a pour l'intégrale générale :

$$\varphi_2 = \varphi(\varphi_1).$$

Celle-ci conduit à une équation linéaire. Les équations linéaires sont donc les seules qui conduisent à des intégrales du système auxiliaire telles que les valeurs de z et de y ne contiennent pas q_0. La réciproque est évidente d'après la remarque précédente.

III. En exprimant que les valeurs données par les relations (13) satisfont à l'équation (4), quand on suppose q_0 seul fonction de u, on trouve :

$$\frac{\delta f_2}{\delta q_0} = f_4 \frac{\delta f_1}{\delta q_0},$$

relation qui prouve que f_2 et f_1 contiennent à la fois q_0, ou en sont toutes deux indépendantes, sauf dans le cas ou $f_4 = 0$ (*).

(*) Serret, qui fait $u = y_0$, $z = \varphi y_0$, $q_0 = \varphi' y_0$, essaye de démontrer ce théorème comme suit. L'équation (4) donne, dans cette hypothèse :

$$\left(\frac{\delta f_2}{\delta y_0} + \frac{\delta f_2}{\delta z_0}\varphi' y_0 + \frac{\delta f_2}{\delta q_0}\varphi'' y_0\right) - f_4\left(\frac{\delta f_1}{\delta y_0} + \frac{\delta f_1}{\delta z_0}\varphi' y_0 + \frac{\delta f_1}{\delta q_0}\varphi'' y_0\right) = 0.$$

« Cette équation, dit-il, devant avoir lieu identiquement, les termes multipliés par $\frac{dq_0}{dy_0}$ doivent se détruire. On a donc identiquement

$$\frac{\delta f_2}{\delta q_0} - f_4 \frac{\delta f_1}{\delta q_0} = 0. »$$

Ce raisonnement nous semble sans force probante, puisque $\varphi'' y_0$ n'a pas une valeur indépendante de celle de z_0 et q_0.

106. Exemples. I. Soit l'équation (*)

$$xy = pq.$$

Les équations auxiliaires seront :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x},$$

ou, en multipliant par $xy = pq$:

$$pdx = qdy = \frac{1}{2} dz = xdp = ydq,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}, \quad dz = \frac{p}{x} \cdot 2xdx = \frac{q}{y} \cdot 2ydy.$$

On trouve immédiatement pour intégrales :

$$\frac{x}{p} = \frac{x_0}{p_0}, \quad \frac{y}{q} = \frac{y_0}{q_0}, \quad z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2),$$

avec la condition :

$$x_0 y_0 = p_0 q_0.$$

En multipliant entre elles les deux valeurs de $(z - z_0)$, on trouve

$$(z - z_0)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2),$$

intégrale complète contenant une constante supplémentaire z_0, si on regarde z_0 comme arbitraire.

Pour avoir l'*intégrale générale*, il suffit d'ajouter à celle-ci la relation

$$(z - z_0)\frac{\delta z_0}{\delta y_0} = (x^2 - x_0^2)\, y_0,$$

ou

$$(z - z_0)\, q_0 = (x^2 - x_0^2)\, y_0,$$

qui est d'ailleurs identique avec l'une des relations données plus haut

$$(z - z_0)\, x_0 = (x^2 - x_0^2)\, p_0,$$

(*) Cauchy, Exercices, etc., t. II, p. 249.

quand on tient compte de $p_0 q_0 = x_0 y_0$.

II. Soit l'équation

$$2xz - px^2 + qxy + q^2x = 0.$$

Les équations auxiliaires sont :

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy + 2qx} = \frac{dz}{q^2x - 2xz} = \frac{-dp}{px} = \frac{-dq}{3qx}.$$

Elles conduisent au système intégral suivant, où $C = q_0 x_0^{-3}$:

$$q = Cx^3,$$

$$p = \frac{p_0}{x_0} x,$$

$$z = -\frac{C^2x^6}{4} + \frac{x^2}{x_0^2}\left(z_0 + \frac{C^2x_0^6}{4}\right),$$

$$y = -\frac{Cx^3}{2} + \frac{x_0}{x}\left(y_0 + \frac{Cx_0^3}{2}\right).$$

Les quantités p_0, q_0, y_0, z_0 sont liés par l'équation

$$2x_0z_0 - p_0x_0^2 + q_0x_0y_0 + q_0^2x_0 = 0.$$

En éliminant C entre les valeurs de y et de z, on trouve l'intégrale complète, A et B étant des constantes,

$$(z - Ax^2) + (y - Bx^{-1})^2 = 0.$$

Dans le cas actuel, on a $\pi = \infty$ pour $x = x_0 = 0$. En effet, $\pi = 2\,x^{-1}$. On trouve $1 = I_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$, équation qui n'apprend plus rien. Mais l'intégrale complète que nous venons de trouver n'ayant plus aucun sens, pour $x_0 = 0$, nous pouvons conclure que nous trouvons ici le nouveau cas d'exception signalé plus haut. Il n'y a pas d'intégrale complète correspondant à $q =$ fonction arbitraire de u et telle que l'on puisse y faire $x = 0$.

§ 29. **Équations contenant un nombre quelconque de variables.**

107. *Réduction du problème à l'intégration d'un système d'équations simultanées.* Soit l'équation :

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Supposons que, pour $x_n = x_{n0}$, les quantités $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, $p_1, \ldots, p_n$ prennent les valeurs $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, \ldots, p_{10}, \ldots, p_{n0}$ liées entre elles par l'équation :

$$f(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

La méthode de Cauchy consiste à prendre $(n-1)$ nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ fonctions de $x_1, \ldots, x_n$. On pourra supposer réciproquement $z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n$ fonctions de u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n$. *Dans cette hypothèse,* on aura :

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx_n} + p_n, \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

$$\frac{dz}{du} = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{du}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

l'équation (4) en représentant $(n-1)$, que l'on obtient en remplaçant successivement u par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ (*). Dérivons l'équation (3) par rapport à u, l'équation (4) par rapport à x_n, et retranchons le second résultat du premier, nous trouverons :

$$\frac{dp_n}{du} = \left(\frac{dp_1}{dx_n}\frac{dx_1}{du} - \frac{dp_1}{du}\frac{dx_1}{dx_n}\right) + \cdots + \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_{n-1}}{du} - \frac{dp_{n-1}}{du}\frac{dx_{n-1}}{dx_n}\right) .\;. \quad (5)$$

(*) Nous employons cette manière abrégée de représenter $(n-1)$ équations plusieurs fois afin de pouvoir calquer le § 29 sur le § 28. Ainsi les équations (5), (7), (8), (9), (10), (10′), (11) en représentent chacune $(n-1)$, obtenues en remplaçant u par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, x par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ou p par p_1, p_2, $\ldots, p_{n-1}$.

On déduit ensuite de l'équation (1)

$$\frac{\delta f}{\delta x_n} + \sum_1^{n-1} \frac{\delta f}{\delta x} \frac{dx}{dx_n} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{dz}{dx_n} + \sum_1^{n} \frac{\delta f}{\delta p} \frac{dp}{dx_n} = 0, \quad \ldots \ldots (6)$$

$$\sum_1^{n-1} \frac{\delta f}{\delta x} \frac{dx}{du} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{dz}{du} + \sum_1^{n} \frac{\delta f}{\delta p} \frac{dp}{du} = 0. \quad \ldots \ldots (7)$$

Substituons dans cette dernière, les valeurs de $\frac{dz}{du}, \frac{dp_n}{du}$ tirées des équations (4) et (5), il viendra :

$$\sum_1^{n-1} \frac{dx}{du} \left(\frac{\delta f}{dx} + p \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp}{dx_n} \right) + \sum_1^{n-1} \frac{dp}{du} \left(\frac{\delta f}{\delta p} - \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dx}{dx_n} \right). \quad . \ . \ (8)$$

Les fonctions u étant indéterminées, nous ferons disparaître la dernière somme qui entre dans cette équation, en posant les $(n - 1)$ équations :

$$\frac{\delta f}{\delta p} - \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dx}{dx_n} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

L'équation (8) deviendra par là :

$$\sum_1^{n-1} \frac{dx}{du} \left(\frac{\delta f}{\delta x} + p \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp}{dx_n} \right) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

Le déterminant

$$\mathrm{D} \frac{x_1, \ldots, x_{n-1}}{u_1, \ldots, u_{n-1}},$$

n'étant pas nul, en général, d'après les conditions (9), qui ne contiennent pas explicitement les u, les équations (10) équivalent à celles-ci :

$$\frac{\delta f}{\delta x} + p \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp}{dx_n} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (10')$$

Enfin, on déduit des équations (6), (5), (10) et (9), comme on l'a vu dans le cas de deux variables indépendantes,

$$\frac{\delta f}{\delta x_n} + p_n \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp_n}{dx_n} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

Les équations (5), (9), (10′), (11) peuvent se mettre sous la forme suivante que nous avons déjà rencontrée (n° 42) :

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta f}{\delta p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\delta f}{\delta x_1} + p_1 \frac{\delta f}{\delta z}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\delta f}{\delta x_n} + p_n \frac{\delta f}{\delta z}} . \quad (12)$$

Ces équations (12) ne contiennent pas les u. On en tirera un système de valeurs :

$$x_1 = f_1,\ x_2 = f_2, \ldots, x_{n-1} = f_{n-1},\ z = f_n,\ p_1 = f_{n+1}, \ldots, p_n = f_{2n}, \quad (13)$$

chacune des fonctions f_i contenant x_n, et les valeurs initiales $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$. Il est clair que pour achever la solution, il suffit de déterminer ces valeurs initiales en fonction des u, de manière à satisfaire aux équations (4).

108. *Détermination d'une intégrale de* (12) *satisfaisant à* (4). Substituons les valeurs (13) dans l'équation (4), et posons :

$$\frac{dz}{du} = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{du} + \mathrm{I} . \ldots \ldots \quad (4')$$

Au moyen de (5), on déduira de celle-ci :

$$\frac{dp_n}{du} = \sum_1^{n-1} \left(\frac{dp}{dx_n} \frac{dx}{du} - \frac{dp}{du} \frac{dx}{dx_n} \right) + \frac{d\mathrm{I}}{dx_n} \ldots \ldots \quad (5')$$

En substituant ces valeurs de $\frac{dz}{du}$ et $\frac{dp_n}{du}$ dans (7), il vient

$$\mathrm{I} \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{d\mathrm{I}}{dx_n} \frac{\delta f}{\delta p_n} = 0 \ldots \ldots \quad (14)$$

D'où, en faisant

$$\mathrm{I}_0 = \frac{dz_0}{du} - \left(p_{10} \frac{dx_{10}}{du} + \cdots + p_{n-1,0} \frac{dx_{n-1,0}}{du} \right), \quad \pi = - \frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{\frac{\delta f}{\delta x_n}} . \ . \quad (15)$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n} \pi dx} \ldots \ldots \quad (16)$$

Pour que $I = 0$, il suffit, en général, que $I_0 = 0$, ou :

$$\frac{dz_0}{du_1} = p_{10}\frac{dx_{10}}{du_1} + \cdots + p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du_1}, \quad \ldots\ldots \quad (17_1)$$

. . . .

$$\frac{dz_0}{du_{n-1}} = p_{10}\frac{dx_{10}}{du_{n-1}} + \cdots + p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du_{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad (17_{n-1})$$

On peut satisfaire à celle-ci de diverses manières (*) :

1° On peut supposer que z_0, $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$ soient des constantes arbitraires, et que $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ soient des fonctions quelconques des u, ou soient eux-mêmes les u. Dans ce cas, en éliminant les p_0 entre les n premières équations (15) on trouvera l'*intégrale complète :*

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

2° On peut supposer

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

$$p_{10} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1,0}},$$

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}$ étant des fonctions quelconques des u, ou étant pris eux-mêmes pour les u. Pour trouver l'intégrale correspondant à cette hypothèse, il faut se donner préalablement la forme de φ, afin de pouvoir éliminer les u entre les n premières équations (15). Cette intégrale est l'*intégrale générale.*

3° Enfin, on peut satisfaire aux équations (17), au moyen d'hypothèses intermédiaires entre celles dont nous venons de parler. On peut poser, en même temps,

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{m0}),$$

$$x_{m+1,0} = \text{constante}, \ldots, x_{n-1,0} = \text{constante},$$

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, p_{m+1,0}, \ldots, p_{n-1,0}$ étant des fonctions quelconques des u, et les autres p étant déterminés par les relations suivantes :

$$p_{10} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{10}}, \ldots, p_{m0} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{m0}}.$$

(*) Ce ne sont pas les seules manières de satisfaire à ces équations (n° 116, III).

109. Remarques. I. Si l'équation donnée est linéaire et de la forme :

$$X_1 p_1 + \cdots + X_n p_n = Z,$$

les n premières équations auxiliaires sont celles de Lagrange :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z} \qquad (19)$$

Elles suffisent pour résoudre complétement le problème (§ 6).

II. Si les n premières équations (13) ne contiennent pas les p_0, on en déduira :

$$x_{10} = \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n-1,0} = \psi_{n-1}(z, x_1, \ldots, x_n),\ z_0 = \psi_n(z, x_1, \ldots, x_n),$$

ce qui donnera l'intégrale

$$\psi_n = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

qui appartient à une équation linéaire.

III. En exprimant que les valeurs données par les relations (13) satisfont aux équations (4) quand on suppose $u = p_0$, il vient :

$$\frac{\delta f_n}{\delta p_{10}} = f_{n+1} \frac{\delta f_1}{\delta p_{10}} + \cdots + f_{2n-1} \frac{\delta f_{n-1}}{\delta p_{10}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta f_n}{\delta p_{n-1,0}} = f_{n+1} \frac{\delta f_1}{\delta p_{n-1,0}} + \cdots + f_{2n-1} \frac{\delta f_{n-1}}{\delta p_{n-1,0}}.$$

Il résulte de ces équations que si $(n-1)$ des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne contiennent pas un des p_0, il en est de même de la $n^{ième}$.

IV. Si l'on déduit des n premières équations (13), par élimination des p, plus d'une et moins de n relations entre z et les x, on se trouve dans le cas des équations semi-linéaires, signalé par Lie (n° 14, III), et rencontré incidemment par Serret (n° 119).

V. On peut donner de la méthode de Cauchy, dans le cas général, une interprétation géométrique symbolique dans un espace à $(n + 1)$ dimensions, d'après les idées de Lie. L'équation (1) représente ∞^{2n} éléments dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions. Les raisonnements des numéros précédents démontrent que les éléments de toute solution de l'équation (1) sont compris

parmi ceux qui satisfont au système auxiliaire (12); le système auxiliaire (12) ne contenant que ∞^{2n} éléments, contient donc seulement les éléments de l'équation (1). Les équations (4) expriment simplement comment il faut grouper les éléments des équations (12), pour que l'on ait $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$. Cette remarque explique aussi pourquoi il suffit de considérer les n premières équations (12) dans le cas où l'équation donnée est linéaire.

110. Exemple. Soit l'équation (*)

$$x_1 x_2 \ldots x_n = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Les équations auxiliaires, après multiplication par $x_1 \ldots x_n = p_1 \ldots p_n$ sont :

$$p_1 dx_1 = \cdots = p_n dx_n = \frac{dz}{n} = x_1 dp_1 = \cdots = x_n dp_n,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dp_1}{p_1}, \ldots, \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dp_n}{p_n},$$

$$\frac{dz}{n} = \frac{p_1}{x_1} x_1 dx_1 = \cdots = \frac{p_n}{x_n} x_n dx_n.$$

On trouve, pour les intégrales :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_{10}}{p_{10}}, \ldots, \frac{x_n}{p_n} = \frac{x_{n0}}{p_{n0}},$$

$$2\,\frac{z - z_0}{n} = \frac{p_{10}}{x_{10}}(x_1^2 - x_{10}^2) = \cdots = \frac{p_{n0}}{x_{n0}}(x_n^2 - x_{n0}^2),$$

avec la condition :

$$x_{10} \ldots x_{n0} = p_{10} \ldots p_{n0}.$$

En multipliant entre elles les n valeurs de $(z - z_0)$, on trouve

$$\frac{2^n}{n^n}(z - z_0)^n = (x_1^2 - x_{10}^2)(x_2^2 - x_{20}^2) \ldots (x_n^2 - x_{n0}^2),$$

(*) Cauchy, dans le mémoire cité, traite ainsi cette équation quand $n = 3$. Graindorge, n° 49, p. 50, n° 69, p. 65, intègre la même équation pour $n = 3$, par la méthode de Jacobi, sous ses deux formes. Voir aussi le n° 73, I.

intégrale complète qui contient une constante supplémentaire, si l'on regarde z_0 comme arbitraire.

111. *Cas d'exception apparente. Modifications de Mayer et Darboux.* I. Si l'équation donnée est homogène par rapport aux p, on a, à cause de $f=0$,

$$p_1\frac{\delta f}{\delta p_1}+p_2\frac{\delta f}{\delta p_2}+\cdots+p_n\frac{\delta f}{\delta p_n}=0,$$

et, par conséquent, la $n^{\text{ième}}$ équation (12) donne pour intégrale

$$z=\text{constante}.$$

Il est impossible évidemment d'éliminer les p_0 entre cette équation et les $(n-1)$ relations $(13_1),\ldots,(13_{n-1})$, et par conséquent la méthode générale de Cauchy ne donne plus l'intégrale complète.

Mayer a indiqué un moyen très-simple d'arriver, tant dans ce cas que dans le cas général, à une intégrale complète contenant comme constantes $p_{10},\ldots,p_{n-1,0}$ et z_0. Pour cela, considérons l'intégrale générale qui est telle que

$$z_0=z'_0+p_{10}x_{10}+\cdots+p_{n-1,0}x_{n-1,0} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

On aura, z'_0 étant une constante,

$$\frac{\delta z_0}{\delta x_{10}}=p_{10},\ldots,\frac{\delta z_0}{\delta x_{n-1,0}}=p_{n-1,0}.$$

Par conséquent, pour trouver l'intégrale complète correspondante, il suffira d'éliminer $z_0, x_{10},\ldots,x_{n-1,0}$ entre les équations $(13_1),\ldots,(13_n)$ et (19). La chose est toujours possible parce que, les x se réduisant à x_0 pour $x_n=x_{n0}$, le déterminant $D\frac{x_1,\ldots,x_{n-1}}{x_0,\ldots,x_{n-1,0}}$ n'est jamais nul, puisque pour $x_n=x_{n0}$, il est égal à l'unité. On peut donc trouver les x_0 en fonction des x.

Il est facile de généraliser ce qui précède. Posons

$$z_0=\varphi(x_{10},\ldots,x_{n-1,0},\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$p_{10}=\frac{\delta\varphi}{\delta x_{10}},\ldots,p_{n-1,0}=\frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1,0}} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant n constantes. Éliminons entre les équations (13_1),..., (13_n), (20) et (21) les quantités z_0, x_0 et p_0, on trouvera

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

relation qui sera une nouvelle intégrale complète. Le système des équations (13_1),..., (13_n)(20) (21) peut être remplacé par (13_1),..., (13_n)(21) (22). Si donc l'on fait $x_n = x_{n0}$, et, par suite, si les équations (13) donnent $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$, $z = z_0$, l'équation (22) conduira à la relation

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ldots \ldots \quad (20)$$

Donc, si l'on faisait simplement $x_n = x_{n0}$ dans (22), on trouverait

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Ainsi l'intégrale complète en question se réduit à la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour $x_n = x_{n0}$ (*).

[II. On peut encore satisfaire aux équations (4) en posant :

$$z = z'_0 + p_{10}x_{10} + \cdots + p_{m0}x_{m0},$$

et regardant $x_{10}, \ldots, x_{m0}, p_{m+1,0}, \ldots, p_{n-1,0}$ comme étant les u, $p_{10}, \ldots, p_{m0}, x_{m+1,0}, \ldots, x_{n-1,0}, z'_0$ les constantes (**).]

(*) Mayer expose directement ces remarques au moyen de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi. Il donne plusieurs théorèmes intéressants sur la liaison des intégrales entre elles (voir le n° 120, note). [On voit que la méthode de Cauchy, exposée dans toute sa généralité, comme nous l'avons fait plus haut, contient implicitement la modification de Mayer.]

[(**) Darboux (Comptes rendus, 1874, t. LXXIX, pp. 1488-1489, 1875, t. LXXX, pp. 160-164) a le premier signalé cette intégrale, mais seulement dans le cas des équations semi-linéaires (voir n° 119). Il expose aussi ses recherches au moyen de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi.]

CHAPITRE II.

RECHERCHES DE SERRET.

—

§ 30. *Équations à deux variables indépendantes.*

112. *Forme donnée à la solution générale dans les recherches de Serret.* L'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

conduit aux équations auxiliaires

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \ldots \quad (2)$$

dont les intégrales sont

$$y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_1)$$

$$z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_2)$$

$$p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_3)$$

$$q = f_4(x, y_0, z_0, q_0). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_4)$$

Nous supposerons que l'on ait déduit des deux premières l'intégrale complète

$$z = \mathrm{M}(x, y, y_0, z_0). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On aura, par conséquent :

$$p = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = \mathrm{N}(x, y, y_0, z_0), \quad q = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \mathrm{P}(x, y, y_0, z_0) \quad \ldots \quad (5)$$

Si l'on veut avoir l'intégrale générale, on n'a qu'à supposer

$$z_0 = \varphi y_0,$$

$$q_0 = \varphi' y_0,$$

et joindre à l'équation (4) sa dérivée par rapport à y_0 :

$$\frac{\delta M}{\delta y_0} + \frac{\delta M}{\delta z_0} q_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Les équations (4), (5), (6) sont équivalentes aux équations (3) et les remplaceront complétement dans ce qui suit (*).

113. *Nouvelle forme de la valeur de* I, *trouvée par Serret.* On peut obtenir la différentielle totale de $f(x, y, z, p, q)$, en ajoutant les différentielles de l'équation (3), ou des équations équivalentes (4), (5), (6), multipliées par des facteurs tels que les différentielles dy_0, dz_0, dq_0 disparaissent du résultat final. Il est évident que l'on doit multiplier par 0, ou laisser de côté l'équation (6), qui contient seule q_0. Multiplions les équations (4), (5_1), (5_2) respectivement par μ, ν, ρ. On aura :

$$df = \left(\mu \frac{\delta M}{\delta x} + \nu \frac{\delta N}{\delta x} + \rho \frac{\delta P}{\delta x}\right) dx$$
$$+ \left(\mu \frac{\delta M}{\delta y} + \nu \frac{\delta N}{\delta y} + \rho \frac{\delta P}{\delta y}\right) dy - \mu dz - \nu dp - \rho dq = 0,$$

si μ, ν, ρ satisfont aux relations :

$$\mu \frac{\delta M}{\delta y_0} + \nu \frac{\delta N}{\delta y_0} + \rho \frac{\delta P}{\delta y_0} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_1)$$

$$\mu \frac{\delta M}{\delta z_0} + \nu \frac{\delta N}{\delta z_0} + \rho \frac{\delta P}{\delta z_0} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_2)$$

(*) Serret établit assez péniblement cette équivalence, en s'appuyant sur le principe insuffisamment démontré, que nous avons signalé au nº 105 en note. Il est facile de corriger ce petit défaut comme on l'a fait au numéro cité. Mais cette vérification à posteriori de la méthode de Cauchy est inutile, puisque tous les calculs de Cauchy peuvent se faire en sens inverse. C'est pour la même raison que nous avons supprimé la vérification à postériori de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi et donnée dans les *Vorlesungen*, pp. 364-369. Voir aussi nº 109, V.

Il est clair que l'on a, d'après ces relations :

$$\pi = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = -\frac{\mu}{\nu},$$

c'est-à-dire, d'après la dernière des équations (7) :

$$\pi = -\frac{\mu}{\nu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\frac{\partial P}{\partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial M}{\partial z_0} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

Remarquons maintenant que pour calculer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx,$$

nous devons supposer π exprimé en x seul, par le moyen des équations (3) ou des équations (4), (5), (6). Nous pouvons donc nous servir de celles-ci pour transformer π. Or, l'équation (6) qui est équivalente à (3_1), mise sous la forme :

$$-q_0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}},$$

donne

$$\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial y_0 \partial x} + \frac{\partial^2 M}{\partial y_0 \partial y}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial M}{\partial y_0}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial z_0 \partial x} + \frac{\partial^2 M}{\partial z_0 \partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée si l'on y fait :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{\nu}.$$

En effet, elle devient, par cette substitution :

$$\frac{\delta M}{\delta z_0}\left(\frac{\delta N}{\delta y_0}+\frac{\delta P}{\delta y_0}\frac{\rho}{\nu}\right)-\frac{\delta M}{\delta y_0}\left(\frac{\delta N}{\delta z_0}+\frac{\delta P}{\delta z_0}\frac{\rho}{\nu}\right)=0,$$

ou encore, après multiplication par ν, à cause des équations (7) :

$$\frac{\delta M}{\delta z_0}\left(-\mu\frac{\delta M}{\delta y_0}\right)-\frac{\delta M}{\delta y_0}\left(-\mu\frac{\delta M}{\delta z_0}\right)=0.$$

On peut donc remplacer $\frac{\rho}{\nu}$ par $\frac{dy}{dx}$ dans la valeur de π, qui devient ainsi :

$$\pi=\frac{\delta}{\delta x}\log\frac{\delta M}{\delta z_0}+\frac{\delta}{\delta y}\log\frac{\delta M}{\delta z_0}\times\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log\frac{\delta M}{\delta z_0}.$$

Par conséquent,

$$I=I_0e^{\int_{x_0}^{x}\pi dx}=I_0e^{\log\frac{\delta M}{\delta z_0}-\log\left(\frac{\delta M}{\delta z_0}\right)_{x=x_0}}=I_0\frac{\delta M}{\delta z_0};$$

car $M=z=z_0$ pour $x=x_0$, et, par suite, $\left(\frac{\delta M}{\delta z_0}\right)_{x=x_0}=1$.

114. *Examen du cas critique.* La formule précédente nous permettra de discuter le cas où la forme de la fonction φy, à laquelle z doit se réduire pour $x=x_0$, est telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{x}\pi dx$ a une valeur infinie et positive, telle par conséquent que

$$-\log\frac{\delta M}{\delta z_0}=\infty,\quad \text{ou}\quad \frac{\delta M}{\delta z_0}=0,$$

quand $x=x_0$. Dans ce cas, on n'est plus sûr, à priori, que

$$I=0,$$

quoique $I_0=0$. On devra donc vérifier, à posteriori, si l'on a vraiment $I=0$. Quand il en sera ainsi, il existera encore une solution $z=M$, se réduisant à $z=\varphi y$, pour $x=x_0$, mais chose remarquable, elle est fournie par *la solution complète*, comme

l'a montré Serret. Les raisonnements de ce géomètre s'appliquent, non-seulement au cas où

$$-\log \frac{\partial M}{\partial z_0},$$

est infini, mais encore à tous les cas, où cette expression, pour $x = x_0$, prend une valeur différente de zéro, $\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)$ étant différent de l'unité, pour $x = x_0$.

Soit, en effet, pour $x = x_0$,

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \text{constante différente de l'unité},$$

et supposons que $z = M$, pour $x = x_0$, devienne $z = \varphi y$, ou encore que pour $x = x_0$, $y = y_0$, on ait $z_0 = \varphi y_0$. Les équations (5), ou les équations (4) (5) (6), doivent donc être identiquement satisfaites pour ces valeurs. Or, si l'on suppose

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z_0 = \varphi y_0,$$

dans l'équation (6), celle-ci ne peut pas être satisfaite, à moins qu'elle ne le soit déjà pour

$$x = x_0, \quad z_0 = \varphi y_0,$$

quelque soit y. En effet, s'il en était autrement, on tirerait de (6) la valeur $y = y_0$, après substitution de

$$x = x_0, \quad z_0 = \varphi y_0,$$

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait, pour $x = x_0$, $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse (*).

(*) Ce raisonnement n'est vrai qu'en général. On admet que la fonction M est telle, que l'on ne puisse y faire $x = x_0$, $y = y_0$, sans que l'on ait, non-seulement $M = z_0$, mais aussi $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$. La valeur de $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ est donnée par l'équation (6); donc l'équation (6) doit conduire à la relation $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$, pour $x = x_0$, $y = y_0$, sauf les cas où y_0 n'existe pas dans cette équation. Serret est peu précis dans les raisonnements qui se rapportent à ce cas critique, qui a besoin encore d'être étudié plus à fond.

Ainsi y_0 disparaît de l'équation (6) quand on fait $x = x_0$. Mais l'équation (6) est la dérivée de l'équation (4) par rapport à y_0. Donc y_0 disparaît aussi de l'équation (4) quand on fait $x = x_0$, puisque la dérivée du premier membre de (4), c'est-à-dire le premier membre de (6) est identiquement nul pour $x = x_0$. Mais nous savons que l'équation (4), pour $x = x_0$, $y = y_0$ donne $z_0 = \varphi y_0$; donc pour $x = x_0$ simplement, elle donne $z = \varphi y$. Dans le cas actuel, la fonction $z_0 = \varphi y_0$ est donc telle que la solution

$$z = \mathrm{M}$$

donne $z = \varphi y$, pour $x = x_0$, sans qu'il soit nécessaire d'éliminer y_0 entre cette équation et l'équation (6); ce qu'il fallait démontrer.

Autrement : dans le cas, le seul important, pour la théorie qui nous occupe, où $\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0} = 0$ pour $x = x_0$, on a aussi, à cause de l'équation (6), $\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta y_0} = 0$, et, par suite, pour $x = x_0$, y_0 n'entre plus dans l'équation (4). Ce raisonnement est plus simple que celui de Serret, et s'applique à des fonctions qui, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ne donneraient pas $\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0} = 1$.

115. Exemple. Soit l'équation

$$pqy - pz + aq = 0,$$

a étant une constante. Les équations auxiliaires

$$\frac{-pdx}{aq} = \frac{qdy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

ont pour intégrale

$$q = q_0, \quad p = aq_0\mathrm{R},$$

$$z = \mathrm{R}\left[z_0(z_0 - qy_0) + aq_0(x - x_0)\right],$$

$$y = \mathrm{R}\left[y_0(z_0 - qy_0) - a(x - x_0)\right],$$

R étant défini par la rélation :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \sqrt{(z_0 - qy_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}.$$

On en déduit, pour l'intégrale complète :

$$z = \frac{y}{y_0}\left[z_0 - \frac{a}{y_0}(x-x_0)\right] + \sqrt{\left(\frac{y^2}{y_0^2}-1\right)(x-x_0)\left[-2a\frac{z_0}{y_0}+\frac{a^2}{y_0^2}(x-x_0)\right]} = \mathrm{M}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0} = \mathrm{R}\,(z_0 - q_0 y_0).$$

Si l'on suppose $z_0 - q_0 y_0 = 0$, on a :

$$z_0 = \alpha y_0, \quad q = \alpha, \quad \frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0} = 0,$$

α étant une constante. Or, si l'on introduit ces valeurs de z_0 et de q_0 dans l'intégrale complète, on trouve que, pour $x = x_0$, il vient $z = \alpha y$, ce qui est le résultat indiqué par le théorème de Serret.

§ 31. *Équations à n variables.*

116. *Forme donnée à l'intégrale générale dans les recherches de Serret.* L'équation

$$f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

conduit aux équations auxiliaires :

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta f}{\delta p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{dz}{\Sigma p \frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{-dp_1}{\frac{\delta f}{\delta x_1} + p_1 \frac{\delta f}{\delta z}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\delta f}{\delta x_n} + p_n \frac{\delta f}{\delta z}}, \quad (2)$$

dont nous représentons les intégrales par les équations :

$$x_i = f_i(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}), \dots\dots \quad (3_i)$$

$$z = f_n(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}), \dots\dots \quad (3_n)$$

$$p_i = f_{n+i}(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}) \quad \dots \quad (3_{n+i})$$

I. Soit

$$\mathrm{F}(z, x_1, \dots, x_n, z_0, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

l'intégrale complète, obtenue par élimination des p_0 entre les n premières équations (3). On pourra remplacer n des équations (3), par les suivantes qui donnent les valeurs des p :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

II. Veut-on avoir l'intégrale générale, on posera (n° 10) :

$$z_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1,0}},$$

et on éliminera les x_0 entre les n premières équations (3), ou entre (4) et les équations suivantes déduites de (4) :

$$\frac{\partial F}{\partial x_{10}} + p_{10} \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1,0}} + p_{n-1,0} \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

Les équations (4) (5) (6) sont équivalentes aux équations (3).

III. On trouve des intégrales moins générales si l'on suppose,

$$z = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1,0}},$$

et, en outre, que les x_0 soient liés entre eux par des équations :

$$x_{m+1,0} = \varphi_1(x_{10}, \ldots, x_{m0}), \ldots, x_{n-1,0} = \varphi_{n-m-1}(x_{10}, \ldots, x_{m0}).$$

Les intégrales moins générales dont il s'agit, ou intégrales mixtes, sont donnéespar les équations (n° 10) :

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{10}} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{10} + \sum_{m+1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial F}{\partial z_0} p_{i0} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{10}} = 0, \quad \ldots \quad (7_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial F}{\partial x_{m0}} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{m0} + \sum_{m+1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial F}{\partial z_0} p_{i0} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m0}} = 0. \quad \ldots \quad (7_m)$$

Remarque. Dans ce dernier cas, on emploie, au fond, m variables auxiliaires $x_{10}, \ldots, x_{m0}$ et $(n-m)$ fonctions arbitraires;

dans le cas de la solution générale, on emploie $(n-1)$ variables auxiliaires et une fonction arbitraire.

117. *Nouvelle forme de la valeur de* I, *trouvée par Serret.* Occupons-nous, en premier lieu, du cas où

$$D \frac{f_1, \dots, f_{n-1}}{p_{10}, \dots, p_{n-1,0}}$$

n'est pas nul. Nous pouvons, dans ce cas, supposer l'équation (4) mise sous la forme :

$$z = M(x_1, \dots, x_n, z_0, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}), \quad \dots\dots \quad (8)$$

et les équations (5) et (6) sous la suivante :

$$p_1 = \frac{\partial M}{\partial x_1} = N_1, \dots ; p_n = \frac{\partial M}{\partial x_n} = N_n, \quad \dots\dots \quad (9)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_{10}} + \frac{\partial M}{\partial z_0} p_{10} = 0, \dots, \frac{\partial M}{\partial x_{n-1,0}} + \frac{\partial M}{\partial z_0} p_{n-1,0} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

L'ensemble de ces équations, qui est équivalent au système (5), va nous permettre de calculer I.

On peut obtenir la différentielle totale df du premier membre de $f=0$, en ajoutant la différentielle de l'équation (8) et celle des équations (9), après les avoir multipliées par des facteurs $\mu, \nu_1, \dots, \nu_n$, propres à faire disparaître dz_0, dx_{10}, ..., $dx_{n-1,0}$. On a donc :

$$df = \sum_1^n \left(\mu \frac{\partial M}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \dots + \nu_n \frac{\partial N_n}{\partial x}\right) - (\mu dz + \nu_1 dp_1 + \dots + \nu_n dp_n),$$

les facteurs $\mu, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ devant satisfaire aux n relations :

$$\mu \frac{\partial M}{\partial z_0} + \nu_1 \frac{\partial N_1}{\partial z_0} + \dots + \nu_n \frac{\partial N_n}{\partial z_0} = 0, \quad \dots \quad (11_1)$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial x_{10}} + \nu_1 \frac{\partial N_1}{\partial x_{10}} + \dots + \nu_n \frac{\partial N_n}{\partial x_{10}} = 0, \quad \dots \quad (11_2)$$

. . . .

$$\mu \frac{\partial M}{\partial x_{n-1,0}} + \nu_1 \frac{\partial N_1}{\partial x_{n-1,0}} + \dots + \nu_n \frac{\partial N_n}{\partial x_{n-1,0}} = 0. \quad \dots \quad (11_n)$$

D'après la valeur de df et la première de ces équations, on a :

$$\pi = -\frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = -\frac{\mu}{\nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_n}\frac{\frac{\delta N_1}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}} + \cdots + \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}\frac{\frac{\delta N_{n-1}}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}} + \frac{\frac{\delta N_n}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}}.$$

On devrait éliminer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de cette valeur de π, au moyen des équations (10); mais on peut auparavant transformer cette expression, au moyen des équations (10) elles-mêmes mises sous la forme :

$$-p_0 = \frac{\frac{\delta M}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta x_0}}.$$

On tire de celle-ci, en dérivant par rapport à x_n :

$$\frac{\delta M}{\delta z_0}\left(\frac{\delta N_1}{\delta x_0}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta N_{n-1}}{\delta x_0}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\delta x_0}{\delta N}\right) -$$
$$\frac{\delta M}{\delta x_0}\left(\frac{\delta N_1}{\delta z_0}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta N_{n-1}}{\delta x_0}\cdot\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\delta N_n}{\delta z_0}\right) = 0.$$

Ces équations, à cause de (11), sont identiquement satisfaites par

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\nu_1}{\nu_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}.$$

Donc la valeur de π peut s'écrire

$$\pi = \frac{\frac{\delta N_1}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\frac{\delta N_{n-1}}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\frac{\delta N_n}{\delta z_0}}{\frac{\delta M}{\delta z_0}} = \frac{d}{dx_n}\log\frac{\delta M}{\delta z_0}.$$

Par conséquent, en se rappelant que, pour $x_n = x_{n0}$,

$$\frac{\delta M}{\delta z_0} = 1,$$

on a :

$$I = I_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n} \pi dx} = I_0 \frac{\delta M}{\delta z_0},$$

ce qui est la formule de SERRET.

118. *Examen du cas critique par Serret.* Supposons que la fonction φ ait été choisie de telle sorte que

$$\frac{\delta M}{\delta z_0} = \text{constante différente de l'unité} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

pour $x_n = x_{n0}$. Il se peut qu'il existe une solution de l'équation (1), telle néanmoins que pour $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots, x_n = x_{n0}$, on ait $z = z_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0})$. Dans ce cas, je dis que cette solution n'est pas l'intégrale générale correspondant aux équations (8) (9) (10), mais est l'intégrale complète, ou une autre solution intermédiaire entre l'intégrale générale et l'intégrale complète.

En effet, lorsque les circonstances précédentes se présentent, les équations (10), à cause de l'équation (12), ne peuvent pas donner $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n,0}$, car cela présuppose, en général, $\frac{\delta M}{\delta z_0} = 1$. On doit donc admettre que pour $x_n = x_{n0}$, ces équations sont identiquement satisfaites, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, soit en restant distinctes, soit en se réduisant à un nombre m moindre que $(n-1)$.

Considérons d'abord le premier cas. Supposons identiquement nuls, pour $x_n = x_{n0}$, les premiers membres des équations (10). Il faut en conclure, que $(z - M)$ ne contient pas $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n0}$, car les premiers membres des équations (10) sont les dérivées de $(z - M)$, par rapport à $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$. Cependant $z - M = 0$, pour $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$, donne $z = z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0})$ si $x_n = x_{n0}$. Donc, pour $x_n = x_{n0}$, on a

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Considérons maintenant le cas où les équations (10) se réduisent

à $k = (n - 1 - m)$ équations distinctes, quand on fait $x_n = x_{n0}$. Tirons-en les valeurs de k d'entre les constantes :

$$x_{m+1,0} = \varphi_1(x_{10}, \ldots, x_{m0}), \ldots, x_{n-1,0} = \varphi_k(x_{10}, \ldots, x_{m0}),$$

et substituons-les dans les équations (10), et dans (8). Après cette substitution, il est clair que les équations (10) deviennent des identités. Il en est de même, par conséquent, des équations suivantes qui sont des combinaisons linéaires des équations (10) :

$$\frac{\delta M}{\delta x_0} + \frac{\delta M}{\delta z_0}\frac{\delta \varphi}{\delta x_0} + \sum_{m+1}^{n-1}\left(\frac{\delta M}{\delta x_{i0}} + \frac{\delta M}{\delta z_0}\frac{\delta \varphi}{\delta x_{i0}}\right)\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_0} = 0; \quad . \; . \; . \quad (13)$$

par suite, $z - M = 0$, dont les équations (13) sont les dérivées identiquement nulles, par rapport à $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}$, ne contient aucune de ces constantes arbitraires. Mais, par hypothèse, pour $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n0}$, $z - M = 0$ donne

$$z = z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}).$$

Donc, enfin pour $x_n = x_{n0}$, la solution mixte, définie par les équations (8) (9) (13), est telle que

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

ce qui démontre le théorème annoncé plus haut.

On arrive au même résultat, au moyen du raisonnement plus simple du n° 114. Le cas d'exception est caractérisé par

$$\left(\frac{\delta M}{\delta z_0}\right)_{x_n = x_{n0}} = 0.$$

On a, par suite, à cause des équations (10) :

$$\frac{\delta M}{\delta x_{10}} = 0, \ldots, \frac{\delta M}{\delta x_{n-1,0}} = 0,$$

ce qui conduit aux conclusions précédentes.

119. *Cas des équations semi-linéaires.* Occupons-nous, en second lieu, du cas des équations semi-linéaires. Les relations (3), par élimination des p_0, donnent m relations entre les variables et leurs valeurs initiales (n° 14, III et 109, IV). On peut alors considérer comme intégrale les relations en question, que nous supposons mises sous la forme :

$$x_{10} = \psi_1(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}), \dots \dots \quad (14_1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{m-1,0} = \psi_{m-1}(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}), \dots \quad (14_{m-1})$$

$$z_0 = \psi_m(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}) \dots\dots \quad (14_m)$$

On peut remplacer (n° 15) cette intégrale par la suivante :

$$\lambda_1\psi_1 + \dots + \lambda_{m-1}\psi_{m-1} - \psi_m = 0, \dots\dots\dots \quad (15)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ étant des constantes arbitraires, ou encore par

$$F(z, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}) = 0, \dots \quad (16)$$

en représentant le premier membre par un seul signe fonctionnel. Les valeurs des p sont données par les équations :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

où

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial x} - \frac{\partial\psi_m}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial z} - \frac{\partial\psi_m}{\partial z}.$$

On trouve une intégrale générale, en égalant à 0, la dérivée de F par rapport aux constantes x_0. On trouve ainsi les équations suivantes :

$$\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_0} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial x_0} - \frac{\partial\psi_m}{\partial x_0} = 0. \dots\dots \quad (18)$$

Les équations (14), (17), (18) remplacent complétement le système (3) et permettent de calculer π, comme l'a montré Serret,

en employant toutefois, au lieu de la relation (15), celle que l'on déduit des équations (14) et d'une relation arbitraire

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

qui remplace l'équation dont nous supposons l'existence :

$$z_0 = \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \ldots, x_{n-1,0}) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Il n'y a de modification dans les calculs qu'en ce que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, sont remplacés par $p_{10}, \ldots, p_{m-1,0}$, comme on le voit facilement.

Posons, comme Serret,

$$\omega \frac{\delta F}{\delta z} = 1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

de manière que les équations (17) deviennent

$$p_1 + \omega \frac{\delta F}{\delta x_1} = 0, \ldots, p_n + \omega \frac{\delta F}{\delta x_n} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17')$$

On reproduira la différentielle totale df du premier membre de l'équation donnée $f=0$, en ajoutant les différentielles totales des équations (20) et (17′), après les avoir multipliées par des facteurs $\mu, \nu_1, \ldots, \nu_n$ propres à faire disparaître les différentielles des n quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \ldots, x_{n-1,0}$ et ω. On aura

$$\pi = -\frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = -\frac{\omega}{\nu_n}\left(\mu \frac{\delta^2 F}{\delta z^2} + \nu_1 \frac{\delta^2 F}{\delta x_1 \delta z} + \cdots + \nu_n \frac{\delta^2 F}{\delta z_n \delta z}\right).$$

A cause de l'équation (20),

$$\omega \frac{\delta^2 F}{\delta z^2} = -\frac{\delta \log \omega}{\delta z}, \quad \omega \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta z} = -\frac{\delta \log \omega}{\delta x},$$

et, par conséquent, la valeur de π devient :

$$\pi = \frac{1}{\nu_n}\left(\mu \frac{\delta \log \omega}{\delta z} + \nu_1 \frac{\delta \log \omega}{\delta x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\delta \log \omega}{\delta x_n}\right).$$

On peut mettre cette valeur sous une forme plus simple, en en faisant disparaître les facteurs auxiliaires. En exprimant que les différentielles des λ disparaissent de df, il vient :

$$\mu \frac{\delta \psi_1}{\delta z} + \nu_1 \frac{\delta \psi_1}{\delta x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\delta \psi_1}{\delta x_n} = 0,$$

. . . .

$$\mu \frac{\delta \psi_{m-1}}{\delta z} + \nu_1 \frac{\delta \psi_{m-1}}{\delta x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\delta \psi_{m-1}}{\delta x_n} = 0.$$

Le multiplicateur de $d\omega$ devant aussi être nul, on a, en outre,

$$\mu \frac{\delta F}{\delta z} + \nu_1 \frac{\delta F}{\delta x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\delta F}{\delta x_n} = 0,$$

égalité, qui se réduit, à cause des précédentes, à :

$$\mu \frac{\delta \psi_m}{\delta z} + \nu_1 \frac{\delta \psi_m}{\delta x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\delta \psi_m}{\delta x_n} = 0,$$

Enfin, à cause de la disparition des différentielles $dx_{m0}, \ldots, dx_{n-1,0}$:

$$\mu \frac{\delta^2 F}{\delta z \delta x_{m0}} + \nu_1 \frac{\delta^2 F}{\delta x_1 \delta x_{m0}} + \cdots + \nu_n \frac{\delta^2 F}{\delta x_n \delta x_{m0}} = 0,$$

. . . .

$$\mu \frac{\delta^2 F}{\delta z \delta x_{n-1,0}} + \nu_1 \frac{\delta^2 F}{\delta x_1 \delta x_{n-1,0}} + \cdots + \nu_n \frac{\delta^2 F}{\delta x_n \delta x_{n-1,0}} = 0.$$

Toutes ces égalités entre les μ sont vérifiées, si l'on pose

$$\frac{dx_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\nu_n} = \frac{dz}{\mu},$$

à cause des équations (14) et (18). Donc enfin

$$\pi dx_n = \frac{d \log \omega}{dx_n} dx_n.$$

Pour $x_1 = x_{10}, \ldots, x_n = x_{n0}, z = z_0$, on a $\omega = 1$. Donc

$$I = I_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n} \pi dx} = I_0 \omega.$$

Dans le cas où l'on a $\omega = \infty$, au lieu de $\omega = 1$, pour $x_n = x_{n0}$, on n'est plus sûr que $I = 0$, en même temps que I_0. Dans le cas où I est nul malgré cette circonstance, il y a encore une solution. On reconnaît, comme dans les cas précédents, qu'elle est donnée par l'intégrale complète, ou une intégrale intermédiaire entre celle-ci et l'intégrale générale, et non par l'intégrale générale même (*).

[Remarque. Si l'équation

$$\frac{dz}{dt} + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

conduit à des équations auxiliaires ayant pour solutions les relations (14), on trouvera, par le n° 111, II, pour intégrale de cette équation semi-linéaire (21) :

$$z = z'_0 + p_{10}\psi_1 + \cdots + p_{m-1,0}\psi_{m-1} + V, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

V étant la valeur de z déduite de (14_m). Dans le cas actuel z n'entre pas dans les équations $(14_1), \ldots, (14_{m-1})$. L'intégrale (22) a été signalée par Darboux (voir n° 111, II).]

(*) Comme on le voit, la méthode générale de Cauchy est préférable à celle de Serret dans l'exposition de ce cas remarquable, surtout quand on introduit dans cette théorie les idées de Lie sur les équations semi-linéaires.

CHAPITRE III.

MÉTHODE DE LIE, CONSIDÉRÉE COMME UNE EXTENSION DE CELLE DE CAUCHY.

—

§ 32. *Exposition de Mayer* (*).

120. *Moyen de déduire d'une intégrale complète, une intégrale qui, pour* $x_n = x_{n0}$, *soit une fonction donnée des autres variables* (**). Soit

$$z = z_0 + F(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

(*) Nous empruntons ce qui suit à deux notices de Mayer insérées dans les Nachrichten de Göttingen de 1872, n° 21, pp. 405-420 et n° 24, pp. 467-472. La première est entièrement consacrée à la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles. Mayer fait remarquer que les diverses recherches de Jacobi sur ce sujet, tant dans la *Nova methodus* que dans les *Vorlesungen,* doivent être soumises à une révision sévère. De son côté, Lie (Nachrichten de 1872, p. 484) dit, à propos des recherches de Mayer, que sa propre méthode permet de traiter facilement la théorie générale des transformations. Nous avons cru, après ces déclarations, devoir laisser de côté toutes les recherches sur ce sujet, parce qu'elles n'ont pas un caractère définitif. Nous n'empruntons à Mayer que le strict nécessaire. [Notre travail était entre les mains de M. Quetelet, quand Mayer a publié tout au long (Math. Ann., t. VI, pp. 162-191) son exposition de la méthode de Lie sous le titre : *Die* Lie'*sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen.* Dans les §§ 1 et 2, pp. 162-166, il donne la démonstration directe des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles, seul emprunt qu'il fait dans son exposition à la méthode de Jacobi.]

(**) Mayer, Nachrichten, 1872, n° 21, théorème Ier, pp. 407-409. Le mode de démonstration est emprunté au mémoire déjà cité du même auteur (Mathematische Annalen, t. III, pp. 449-450). Toute la fin de ce mémoire, pp. 449-452, est consacrée à la théorie des transformations. [Même théorème, dit théorème Ier, mais spécialisé, dans l'exposition complète de Mayer (Math. Ann., t. VI, § 3, pp. 166-169). L'auteur énonce explicitement les conditons algébriques relatives à la résolubilité des équations utilisées. Toutes les conditions de ce genre ont été laissées de côté dans notre exposition.]

une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles, où z n'entre pas explicitement. Posons :

$$Z = z'_0 + F - F_0 + F'_0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$
$$F_0 = F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$
$$F'_0 = F'(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}).$$

Tirons les valeurs de $c_1, \ldots, c_{n-1}, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$ des $2(n-1)$ équations :

$$\frac{\delta F}{\delta c_1} = \frac{\delta F_0}{\delta c_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta c_{n-1}} = \frac{\delta F_0}{\delta c_{n-1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$
$$\frac{\delta F'_0}{\delta x_{10}} = \frac{\delta F_0}{\delta x_{10}}, \ldots, \frac{\delta F'_0}{\delta x_{n-1,0}} = \frac{\delta F_0}{\delta x_{n-1,0}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

substituons-les dans la valeur de Z et nous aurons une nouvelle intégrale de l'équation. En effet, dans cette hypothèse, on a :

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\delta F}{\delta x} + \Sigma \left(\frac{\delta F}{\delta c} - \frac{\delta F_0}{\delta c}\right) \frac{dc}{dx} + \Sigma \left(\frac{\delta F'_0}{\delta x_0} - \frac{\delta F_0}{\delta x_0}\right) \frac{dx_0}{dx},$$

ou, d'après les équations (3) et (4),

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\delta F}{\delta x} = \frac{dz}{dx}.$$

Z est donc une solution de l'équation.

Faisons $x_n = x_{n0}$ dans les équations (3); il est clair qu'elles seront satisfaites par les valeurs $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$. Donc si l'on fait $x_n = x_{n0}$, dans (2) il vient

$$Z_{x_n = x_{n0}} = z'_0 + F'_0(x_1, \ldots, x_{n-1}). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ainsi, on peut déduire de l'intégrale complète, une intégrale qui se réduit à la forme (5) pour $x_n = x_{n0}$.

Cas particulier. Soit

$$F'_0 = b_1 x_{10} + \cdots + b_{n-1} x_{n-1,0},$$

les équations (4) deviennent

$$b_1 = \frac{\delta F}{\delta x_{10}}, \ldots, b_{n-1} = \frac{\delta F}{\delta x_{n-1,0}},$$

et l'intégrale nouvelle, pour $x_n = x_{n0}$, doit se réduire à

$$z'_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_{n-1} x_{n-1}.$$

Remarque. Les équations (3), (4) peuvent donner plusieurs valeurs pour $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$. Il faut choisir, pour les substituer dans (2), celles de ces valeurs qui peuvent devenir infiniment peu différentes de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, quand x_n approche indéfiniment de x_{n0}, sans quoi, la démonstration donnée plus haut serait insuffisante.

121. *Transformation d'une équation en une autre équivalente* (*). Soit considérée une fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

de n variables x, et de $(n-1)$ variables x'. Posons :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x'_1} = \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{\delta\varphi}{\delta x'_{n-1}} = \frac{dz'}{dx'_{n-1}}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

et tirons de ces relations (6) les valeurs de

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, \text{ en fonction de } x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}.$$

Soit ensuite, à cause de ces valeurs :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta\varphi}{\delta x_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta\varphi}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1}}\right) \\ &= -\mathrm{H}'\left(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Je dis que les équations :

$$\frac{dz}{dx_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\frac{dz'}{dx_n} + \mathrm{H}'\left(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right) = 0, \quad \ldots \quad (9)$$

(*) Mayer, Nachrichten, n° 21, pp. 414-417, théorème IV, énoncé sans démonstration. [Math. Ann., t. VI, pp. 169-175, § 3, théorème II.]

seront telles, qu'en général, de toute intégrale complète de l'une, l'on pourra déduire une intégrale complète de l'autre et réciproquement.

Soit, en effet,

$$z = z_0 + F(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_{n-1}), \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

une intégrale complète de (8). Posons :

$$z' = z'_0 + F_0 - F + \varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

en appelant F_0 l'expression :

$$F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

et éliminons de l'expression (11), c_1, ..., c_{n-1}, x_1, ..., x_{n-1}, au moyen des relations :

$$\frac{\delta F_0}{\delta c_1} = \frac{\delta F}{\delta c_1}, \ldots, \frac{\delta F_0}{\delta c_{n-1}} = \frac{\delta F}{\delta c_{n-1}}, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_{n-1}} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_{n-1}}. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

La valeur de z' dans ce cas satisfera à l'équation (9).

En effet, on a, pour $x' = x'_1, \ldots, x'_{n-1}$:

$$\frac{dz'}{dx'} = \Sigma\left(\frac{\delta F_0}{\delta c} - \frac{\delta F}{\delta c}\right)\frac{dc}{dx'} - \Sigma\left(\frac{\delta F}{\delta x} - \frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)\frac{dx}{dx'} + \frac{\delta \varphi}{\delta x'},$$

ou, à cause des équations (12) et (13),

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{\delta \varphi}{\delta x'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Ensuite :

$$\frac{dz'}{dx_n} = \Sigma\left(\frac{\delta F_0}{\delta c} - \frac{\delta F}{\delta c}\right)\frac{dc}{dx_n} - \Sigma\left(\frac{\delta F}{\delta x} - \frac{\delta \varphi}{\delta x}\right)\frac{dx}{dx_n} - \frac{\delta F}{\delta x_n} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n},$$

ou, puisque F est une solution de (8), et à cause de (12) et (13),

$$\frac{dz'}{dx_n} = H + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

En substituant les valeurs (14) et (15) dans (9), il vient à cause des équations (6) identiques à (14), et de (7) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \mathrm{H} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \mathrm{H}\right) = 0,$$

ce qui démontre la première moitié du théorème énoncé.

Soit maintenant

$$z' = z'_0 + \mathrm{F}'(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, c'_1, \ldots, c'_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

une intégrale complète de (9). Posons :

$$z = z_0 + \mathrm{F}'_0 - \mathrm{F}' + \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

en appelant F'_0 l'expression

$$\mathrm{F}'(x'_{10}, \ldots, x'_{n-1,0}, x_{n0}, c'_1, \ldots ; c_{n-1}).$$

Éliminons ensuite, de la valeur de z, les quantités $c'_1, \ldots, c'_{n-1}$, $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, au moyen des équations :

$$\frac{\partial \mathrm{F}'_0}{\partial c'_1} = \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial c'_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}'_0}{\partial c'_{n-1}} = \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial c_{n-1}},$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x'_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x'_{n-1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_{n-1}}.$$

La valeur de z, après cette élimination, sera une intégrale de l'équation (8). En effet, on trouve, comme plus haut, pour $x = x_1, \ldots, x_{n-1}$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

et ensuite

$$\frac{dz}{dx_n} = -\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \mathrm{H}' + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), elle est satisfaite identiquement.

Remarques. I. Si l'on fait $x_n = x_{n0}$ dans les solutions précédentes on trouve, comme au numéro précédent, que les solutions z et z' déduites de F′ et F, se réduisent respectivement à

$$z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, x'_{10}, \ldots, x'_{n-1,0}),$$

$$z'_0 + \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, x_{n0}, x'_1, \ldots, x'_{n-1}).$$

II. Si φ est une solution de l'équation (8), $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ étant $(n-1)$ constantes arbitraires, l'équation (7) donnera :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta\varphi}{\delta x_1}, \cdots, \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{H}' = 0$. La seconde équation, c'est-à-dire (9), sera donc :

$$\frac{\delta z'}{\delta x_n} = 0.$$

III. Si H et φ contenaient, outre les variables x et x', d'autres variables $y_1, \ldots, y_m$, elles se comporteraient comme des constantes dans tous les calculs précédents et il serait inutile d'y rien changer.

122. *Transformation d'un système de deux équations* (*). Considérons maintenant deux équations, à $(n+1)$ variables indépendantes *ayant, par hypothèse, une solution commune avec* n *constantes arbitraires :*

$$\frac{dz}{dy} + \mathrm{K}\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{dz}{dx_1}, \cdots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (18)$$

$$\frac{dz}{dx_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{dz}{dx_1}, \cdots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0. \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

Soit

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_n, y, x'_1, \ldots, x'_{n-1}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

une solution de la première, avec n constantes arbitraires. On la

(*) Mayer, Nachrichten de Göttingen, 1872, p. 467, dit seulement que l'on peut faire disparaître y de (19), si l'on connaît une solution complète de (18). Il cite le travail de Korkine que nous avons analysé ci-dessus, § 24. Nous essayons de reconstruire la démonstration de Mayer. Si elle ne semble pas rigoureuse au lecteur, qu'il veuille bien admettre comme un postulat la disparition de y de l'équation (22), en attendant que Mayer public sa démonstration. Il importe de remarquer que l'idée fondamentale de Mayer, savoir de faire $y = y_0$, ne se trouve ni chez Korkine, ni chez Bour. [Notre démonstration est précisément celle de Mayer, mémoire cité, § 4 (Math. Ann., t. VI, pp, 173-176); seulement il donne une démonstration analytique de la non-existence de y dans l'équation (22), tandis que notre démonstration est synthétique.]

trouvera en regardant x_n dans (18) comme une constante. Servons-nous de la fonction φ, pour transformer les précédentes en deux autres, d'après la règle donnée au n° 121. La première deviendra (121, Remarque II)

$$\frac{dz'}{dy} = 0, \qquad (21)$$

la seconde :

$$\frac{dz'}{dx_n} + \mathrm{H}'\left(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, y, \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right) = 0. \qquad (22)$$

Il est clair qu'à la solution commune des équations (18), (19), correspondra une solution commune des équations (21) et (22); or (21) exprime que cette solution ne contient pas y. Dans le cas où les deux équations sont quelconques, on peut faire deux hypothèses relativement à l'équation (22): ou bien, elle contient explicitement y, ou bien y en a disparu. Dans le dernier cas, la solution complète de (22), avec n constantes arbitraires, est une solution commune des équations (21) et (22), et de cette solution commune, on peut déduire une solution commune des équations (18) et (19) avec n constantes arbitraires. Si, au contraire, l'équation (22) contient y, son intégrale complète sera de la forme

$$z' = z'_0 + \Phi(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, y, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

les constantes contenant y. Pour trouver une solution commune des équations (21) et (22), on devra exprimer que

$$\frac{dz'}{dy} = 0,$$

équation qui déterminera une relation entre les n constantes, arbitraires, z'_0, c_1, ..., c_{n-1}. Par conséquent, contrairement à l'hypothèse, il n'y aura pas de solution commune aux équations (18) et (19) et contenant n constantes arbitraires.

Donc enfin, l'équation (22) ne contient pas y, dans le cas où les équations (18) et (19) ont une solution commune contenant n constantes arbitraires.

123. *Simplification de la transformation précédente. Méthode générale de Lie, pour les systèmes simultanés* (*). On peut simplifier la transformation précédente, au moyen de la remarque suivante. Puisque y n'entre pas dans l'équation (22), on peut, pour faire la transformation, supposer que y reçoive une valeur quelconque. D'autre part (n° 120), d'une intégrale quelconque de l'équation (18), on peut déduire une autre intégrale qui prenne, pour $y = y_0$, telle forme que l'on voudra. Donc enfin, pour faire la transformation de l'équation (19), on peut prendre, au lieu de la relation (20), la suivante

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

ou même, ψ étant quelconque, comme y_0,

$$z = z_0 + \psi(x_1, \ldots, x_n, y_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}).$$

On choisira la fonction ψ, de telle manière que les calculs soient les plus simples possibles.

On peut donc, au moyen de l'intégration complète de l'équation (18), puis, par une transformation, où entre une fonction ψ quelconque, ou bien l'intégrale complète que l'on vient de trouver, ramener la recherche de l'intégrale complète contenant n constantes arbitraires et commune à deux équations (18) et (19), à celle de l'intégrale complète d'une équation (22), contenant une variable de moins.

De même, on ramène successivement l'intégrale de $(q + 1)$ équations à $(n + q)$ variables indépendantes, et ayant une solution commune avec n constantes arbitraires, à celles de q, $(q - 1)$, $(q - 2)$, ..., 2 équations, contenant respectivement $(n + q - 1)$, $(n + q - 2)$, $(n + q - 3)$, ..., $(n + 1)$ variables indépendantes, et enfin à celle d'une équation contenant n variables indépendantes.

Remarque. C'est au moyen de la méthode de Bour que l'on constate que le système a une solution contenant un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des variables moins celui

(*) [Mayer appelle la remarque de ce numéro théorème IV, et en donne la démonstration dans le mémoire cité, § 4 (Math. Ann., pp. 176-177).]

des équations. Si le système ne jouit pas de cette propriété, Bour a précisément indiqué le moyen d'ajouter au système donné les équations nécessaires, pour qu'il l'a possède.

124. *Seconde simplification. Théorème fondamental de Lie.* Considérons les $(m+1)$ équations :

$$\frac{dz}{dy}+\mathrm{K}\left(x_1,\ldots,x_{n-1},y,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\ldots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\ldots \quad (23)$$

$$\frac{dz}{dt_1}+\mathrm{H}_1\left(x_1,\ldots,x_{n-1},y,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\ldots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\ldots \quad (24_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{dt_m}+\mathrm{H}_m\left(x_1,\ldots,x_{n-1},y,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\ldots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\ldots \quad (24_m)$$

Effectuons d'abord un changement de variables. Soient :

$$t_1=t_{10}+(y-y_0)\,u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$t_m=t_{m0}+(y-y_0)\,u_m.$$

On aura pour les nouvelles dérivées de z, que nous mettrons entre parenthèses, pour les distinguer du système primitif :

$$\left(\frac{dz}{du_1}\right)=\frac{dz}{dt_1}(y-y_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dz}{du_m}\right)=\frac{dz}{dt_m}(y-y_0),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{dz}{dy}+\frac{dz}{dt_1}u_1+\frac{dz}{dt_2}u_2+\cdots+\frac{dz}{dt_m}u_m.$$

Les équations données peuvent donc être remplacées par le système suivant :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)+\mathrm{K}+u_1\mathrm{H}_1+\cdots+u_m\mathrm{H}_m=0,\ \ldots\ldots \quad (25)$$

$$\left(\frac{dz}{du_i}\right)+(y-y_0)\,\mathrm{H}_i=0.\ \ldots\ldots\ldots \quad (26_i)$$

Soit maintenant

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, y, u_1, \dots, u_m, x'_1, \dots, x'_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

une solution complète de (25), quand on regarde les u comme des constantes. Transformons, par la règle du n° 121, chacune des équations (26), en nous servant de la fonction φ qui entre dans (27). Une quelconque de ces équations prendra la forme :

$$\frac{dz'}{du} + H' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

H′ étant déterminé par l'équation :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u} + (y - y_0) H = -H',$$

$x_1, \dots, x_{n-1}$ étant remplacés par leurs valeurs déduites des équations :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x'_1} = \frac{dz'}{dx'_1}, \dots, \frac{\delta\varphi}{\delta x'_{n-1}} = \frac{dz'}{dx'_{n-1}}.$$

Nous savons que nous pouvons faire $y = y_0$ dans H′. Dans ce cas, — H′ se réduit à $\frac{\delta\varphi}{\delta u}$ où l'on a fait $y = y_0$. On sait, par la remarque du n° 121, que φ, pour cette valeur, se réduit à l'expression

$$\varphi(x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, y_{10}, u_1, \dots, u_m, x'_1, \dots, x'_{n-1}),$$

que nous appelons φ_0. Donc enfin, la transformée (28) devient

$$\frac{dz'}{du} = \frac{\delta\varphi_0}{\delta u}.$$

Par conséquent, la tranformation, dans le cas actuel, remplace les équations (26) par les suivantes :

$$\frac{dz'}{du_1} = \frac{\delta\varphi_0}{\delta u_1}, \dots, \frac{dz'}{du_m} = \frac{\delta\varphi_0}{\delta u_m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

dont la solution commune est :

$$z'_1 = z'_0 + \varphi(x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, y_0, u_1, u_2, \dots, u_m, x'_1, \dots, x'_{n-1}), \quad (30)$$

qui contient n constantes arbitraires.

Comme on le voit, l'intégration du système (23) (24) est ramené à celle de l'équation unique (25), puisque de son intégrale (27), on déduit l'intégrale (30) du système transformé (29). De l'intégrale (30) on déduit une autre intégrale quelconque, par le n° 120, puis l'intégrale des équations données par le n° 121 (*).

125. *Mode d'application de la méthode de Lie.* Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à intégrer, on le ramène par la théorie précédente à une équation unique, $H_1 = 0$. On cherchera, comme dans la méthode de Jacobi, une fonction H_2 des x et des p telle que $(H_2, H_1) = 0$. Au moyen de $H_2 = a_2$, on pourra ramener H_1 à contenir un p de moins. On traitera cette nouvelle équation comme la première, en profitant, à chaque nouvelle intégration, de la remarque suivante : chaque fois que l'on rencontre le cas le plus défavorable de la méthode de Jacobi, on emploie celle de Cauchy, et l'intégration est immédiatement terminée (**).

Comme on le voit, la méthode de Lie ramène sans cesse l'intégration à celle d'une équation unique, la methode de Cauchy et celle de Jacobi servent ensuite à effectuer l'intégration avec le plus de facilité possible.

126. [*Démonstration directe du théorème fondamental de Lie, par la méthode de Cauchy* (***). Le théorème du n° 124 revient à

(*) Mayer énonce sans démonstration le théorème de ce numéro, dans le cas ou $m = 1$, Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 469 et 472. [Démonstration dans le mémoire cité (Math. Ann. t. VI, pp. 185-189), § 7, théorèmes VIII et IX. Mayer applique la méthode aux équations linéaires homogènes, § 8, pp. 189-192. Les §§ 4 et 5, pp. 179-183, sont consacrés au cas de deux équations, dont il est inutile de s'occuper spécialement.]

(**) Lie, *ibid.*, pp. 488-489. Il est étonnant qu'une remarque aussi simple ait échappé à tous les géomètres, avant Lie.

(***) Mayer, *Directe Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy* (Math. Ann., t. VI, pp. 192-196) et § I de la note plus générale, intitulée : *Zur Integration der partieller Differentialgleichung erster Ordnung* (Nachrichten de Göttingen, 1873, pp. 299-310). Mayer se sert de la valeur de z_0 indiquée au n° 111 pour éviter les cas d'exception. Il laisse quelques points de son exposition sans démonstration explicite.

ceci : il existe une solution de l'équation (25) qui est en même temps une solution des équations (26). On peut établir directement ce théorème par la méthode de Cauchy.

Écrivons comme suit les équations (25) et (26) :

$$q + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0, \quad . \quad . \quad (25')$$

$$\frac{dz}{du_i} + f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0, \quad . \quad . \quad (26'_i)$$

Parmi les conditions d'intégrabilité simultanée de ce système, se trouvent m équations qui sont représentées par la suivante :

$$\frac{\delta f}{\delta u_i} - \frac{\delta f_i}{\delta y} + \Sigma \left(\frac{\delta f}{\delta x_k} \frac{\delta f_i}{\delta p_k} - \frac{\delta f}{\delta p_k} \frac{\delta f_i}{\delta x_k} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

La méthode de Cauchy appliquée à l'équation (25′) conduit à la considération du système auxiliaire :

$$dy = \cdots = \frac{dx_k}{\dfrac{\delta f}{\delta p_k}} = \cdots = \frac{dz}{\Sigma p_k \dfrac{\delta f}{\delta p_k} - f} = \cdots = \frac{-dp_k}{\dfrac{\delta f}{\delta x_k}} = \cdots \quad . \quad (32)$$

On déduit de là le système intégral :

$$x_k = \chi_k(y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m), \quad . \quad . \quad (33)$$

$$p_k = \varphi_k(y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m), \quad . \quad . \quad (34)$$

$$z = z_0 + \int_{y_0}^{y} \left(\Sigma p_k \frac{\delta f}{\delta p_k} - f \right) dy, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ étant les valeurs initiales des variables pour $y = y_0$, et z_0 étant une fonction quelconque des u qui contient une constante arbitraire z'_0. Sous le signe d'intégration, on suppose les p_k et les x_k remplacés par leurs valeurs (33) et (34).

Éliminons $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ entre les équations (33) et (35). Nous trouverons une solution

$$Z = z'_0 + F(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) \quad . \quad . \quad (36)$$

de l'équation (25'). Je dis que, si la fonction z_0 des u est convenablement choisie, cette solution (36) satisfera également aux équations (26'). Pour cela, il suffira que z_0 ne contienne pas les u.

Pour le montrer, nous devons dériver Z, par rapport à un u quelconque. Cela ne peut se faire qu'indirectement de la manière suivante : substituons dans l'équation (36) à $x_1, \ldots, x_{n-1}$, les valeurs (33), on retombera sur la fonction z de y donnée par la relation (35), sous la forme :

$$Z = z'_0 + F(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) = z'_0 + F^*. \quad (37)$$

On arrive au but cherché en égalant les dérivées des expressions (35) et (37) de z, par rapport à u. On déduit d'abord de (37)

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{\delta F^*}{\delta u_i} + \Sigma \frac{\delta F^*}{\delta \chi_k} \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i}.$$

Soit, en éliminant les p_0,

$$p_k = P_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m)$$

la valeur de p_k, déduite de l'équation (34). On aura identiquement

$$\varphi_k = P_k(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m).$$

Puisque Z est une solution de l'équation (25'), on aura :

$$\frac{\delta F}{\delta x_k} = P_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\delta F^*}{\delta \chi_k} = P_k(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) = \varphi_k.$$

Donc la valeur précédente de $\frac{dz}{du_i}$ peut s'écrire :

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{\delta F^*}{\delta u_i} + \Sigma \varphi_k \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Cherchons maintenant la même quantité, au moyen de l'expression (35) de z. Il viendra, en supprimant sous le signe d'intégration les termes qui se détruisent,

$$\frac{dz}{du_i}=\frac{dz_0}{du_i}+\int_{y_0}^{y}\Sigma\left(\varphi_k\frac{d\frac{\delta f}{\delta p_k}}{du_i}-\frac{\delta f}{\delta x_k}\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}\right)-\int_{y_0}^{y}\frac{\delta f}{\delta u_i}dy.$$

On peut effectuer les deux intégrations ici indiquées, en se servant des conditions d'intégrabilité (31) et exprimant que les équations (33) et (34) satisfont aux équations (32). On a, en effet,

$$\frac{\delta\chi_k}{\delta y}=\frac{\delta f}{\delta p_k},\quad \frac{\delta\varphi_k}{\delta y}=-\frac{\delta f}{\delta x_k}.$$

Par suite,

$$\varphi_k\frac{d\frac{\delta f}{\delta p_k}}{du_i}-\frac{\delta f}{\delta x_k}\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}=\varphi_k\frac{d\frac{\delta\chi_k}{\delta y}}{du_i}+\frac{\delta\varphi_k}{\delta y}\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}=\frac{d}{dy}\left(\varphi_k\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}\right),$$

et la condition d'intégrabilité (31) devient, en se servant de la notation f^*, pour f où l'on a substitué les valeurs (33) et (34), des x et des p :

$$\frac{\delta f}{\delta u_i}=\frac{\delta f_i}{\delta y}+\Sigma\left(\frac{\delta f_i}{\delta p_k}\frac{\delta\varphi_k}{\delta y}+\frac{\delta f_i}{\delta x_k}\frac{\delta\chi_k}{\delta y}\right)$$
$$=\frac{d}{dy}f_i(\chi_1,\ldots,\chi_{n-1},y,u_1,\ldots,u_m,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})=\frac{df_i^*}{dy}.$$

Effectuons les intégrations indiquées plus haut. Il vient :

$$\frac{dz}{du_i}=\frac{dz_0}{du_i}+\Sigma\varphi_k\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}-\left(\Sigma\varphi_k\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}\right)_0-f_i^*+f_{i0}^*.$$

Pour $y=y_0$, f_i, qui contient $(y-y_0)$ en facteur, s'annule et $\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}$ aussi, parce que χ_k se réduit à x_{k0}, pour $y=y_0$. Donc enfin

$$\frac{dz}{du_i}=\frac{dz_0}{du_i}+\Sigma\varphi_k\frac{\delta\chi_k}{\delta u_i}-f_i^*.$$

Comparant cette valeur à la valeur (38), on trouve

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_i} + f_i^* = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

si l'on suppose z_0 indépendant de u_i, ou

$$\frac{dz_0}{du_i} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

L'équation (39) doit être une identité par rapport à

$$\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m,$$

parce que les fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, contenant, en général, $(n-1)$ constantes arbitraires $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$, sont indépendantes les unes des autres. On a donc aussi, à cause de cette équation (39)

$$\frac{\partial F}{\partial u} + f_i = 0.$$

Donc la solution Z de l'équation (25′) satisfait aux équations (26′), pourvu que z_0, dans l'équation (35), ne contienne pas les u.

127. *Remarques sur la méthode précédente.* I. Si l'on applique la méthode précédente aux équations (23) et (24), on trouve pour déterminer z_0, les équations suivantes :

$$\frac{dz_0}{du_i} + H_i\,(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, y_0, u_1, \ldots, u_m, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}) = 0$$

qui ne sont intégrables que si l'on a :

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_l} = \frac{\partial H_l}{\partial u_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

On ne peut donc pas appliquer la méthode précédente directement aux équations (23) et (24). On voit, en même temps, que les conditions de réussite de la méthode résident dans les égalités

$$f_{10} = 0, \ldots, f_{m0} = 0,$$

ou dans les équations plus générales (41). La méthode est donc susceptible, en pratique, de diverses modifications.

II. Les conditions d'intégrabilité (31), écrites au moyen des fonctions K et H, prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial K}{\partial t_i} - \frac{\partial H_i}{\partial y} + \Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)$$
$$+ \Sigma u_l\left\{\frac{\partial H_l}{\partial t_i} - \frac{\partial H_i}{\partial t_l} + \Sigma\left(\frac{\partial H_l}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial H_l}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)\right\} = 0.$$

Si l'on fait décroître indéfiniment vers zéro, dans ces équations, les quantités u, ou si l'on fait converger chaque quantité t vers la valeur arbitraire t_0, on verra que l'on peut égaler à zéro, dans l'équation précédente, l'expression qui ne contient aucun u en facteur, et le coefficient de chacun des u. On a donc :

$$\frac{\partial K}{\partial t_i} - \frac{\partial H_i}{\partial y} + \Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial H_l}{\partial t_i} - \frac{\partial H_i}{\partial t_l} + \Sigma\left(\frac{\partial H_l}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial H_l}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Toutes les conditions d'intégrabilité du système des équations (23) et (24) sont donc équivalentes aux conditions (31) et réciproquement. Ainsi s'explique ce paradoxe, que les équations (31), parmi les conditions d'intégrabilité du système des équations (25′) et (26′), soient seules utilisées dans ce qui précède.

III. D'après la remarque II du n° 55, le système intégral des équations (32) peut être représenté par les relations suivantes :

$$z = z_0' + F, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{i0}} = a_i,$$

$a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant des constantes, respectivement égales à $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$, comme il est facile de le voir. Sous cette forme, on voit que le système intégral des équations (32) est aussi celui des équations analogues, obtenues en remplaçant y par u_i, et f par f_i. Cette remarque est très-importante dans l'exposé de la méthode de Lie, d'après les écrits du géomètre norwégien lui-même.]

APPENDICE.

LA MÉTHODE DE LIE, COMME SYNTHÈSE DES MÉTHODES ANTÉRIEURES.

§ 33. *Exposition de Lie* (*).

128. *Définition des caractéristiques.* Les éléments d'une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

sont en nombre ∞^{2n}. Si l'on cherche une figure qui en contienne ∞^n, les coordonnées de chacun de ces éléments devront s'exprimer en fonction de n variables, par exemple, $u_1, \dots, u_{n-1}, x_n$. Si, de plus, ces éléments constituent une intégrale, ils satisfont (n° 5) à la condition

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n, \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

(*) Cet exposé est fait d'après les écrits de Lie dont les titres suivent : A. *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien* (Vorgelegt der Academie zu Christiania, 3 mai 1872) (4 pages). B. *Neue Integrations methode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen* n *Variabeln* (*ibid*, 10 mai 1872) (7 p.). C. *Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* (Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 321-326). D. *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung insbesondere über eine Classification derselben* (*ibid.*, 1872, pp. 473-489). Nous n'avons pas utilisé les écrits plus récents de Lie parce que cela nous aurait conduit à faire une exposition complète des transformations tangentielles. Voici la liste de ces autres mémoires de Lie, rangés dans l'ordre où ils doivent être lus. 1. *Zur analytischen Theorie der Berührungs-Transformationen* (Ac. de Ch., 1873; pp. 237-262). 2. *Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayerschen Integrations-Methode* (*ibid.*, août 1873; p. 282-288). 3. *Ueber partielle Differential-*

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx_n} + p_n, \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{dz}{du} = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{du} \quad \ldots\ldots (4)$$

En partant de ces relations, Cauchy a ramené l'intégration de l'équation (1) à celles des équations précédentes et des suivantes :

$$\sum_1^{n-1} \left\{ \left(\frac{\delta f}{\delta x_i} + p_i \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp_i}{dx_n} \right) \frac{dx_i}{du} + \left(\frac{\delta f}{\delta p_i} - \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{\delta x_i}{\delta x_n} \right) \frac{dp_i}{du} \right\} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x_n} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{dz}{dx_n} \right) + \sum_1^{n-1} \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_i} \frac{dx_i}{dx_n} + \frac{\delta f}{\delta p_i} \frac{dp_i}{dx_n} \right\} = 0 \quad \ldots (6)$$

pourvu que l'on suppose, entre les valeurs initiales des coordonnées de l'élément, la relation suivante :

$$f(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0 \quad \ldots\ldots (7)$$

Parmi les éléments de toutes les intégrales qui contiennent l'élément initial, il y en a une infinité simple (∞^1), qui sont communs à toutes ces intégrales. Ce sont les éléments qui sont tels que les coefficients des dérivées de x_i et p_i, dans l'équation (5), soient nuls, quelle que soit la valeur de ces dérivées, ces

Gleichungen 1. O. (*ibid.*, mars 1873; pp. 16-51). 4. *Partielle Differential-Gleichungen 1. O., in denen die unbekannte Funktion explicite vorkommt* (*ibid.*, mars 1873, pp. 52-85). 5. *Neue Integrations-Methode eines* 2n-*gliedrigen Pfaffschen Problems* (*ibid.*, octobre 1873; pp. 320-343). Avec les précédents ces divers écrits forment un total de 175 pages in-8°, presque entièrement nouvelles, sur la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles. [Depuis que cette note a été écrite, ont encore paru les écrits suivants : Lie, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen* (Math. Ann., t. VIII, pp. 215-303). Mayer, *Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen* (ibid., pp. 304-312). *Ueber eine Erweiterung der* Lie'*schen Integrationsmethode* (ibid., pp. 313-318). Ces deux écrits de Mayer ont déjà été publiés, avec moins de développements, dans les Nachrichten de Göttingen, 1874, pp. 317 et suiv , 1873, n° 11, à l'endroit indiqué dans la note du n° 126.]

éléments satisfaisant d'ailleurs à l'équation (4). C'est en exprimant les conditions que nous venons d'énoncer que CAUCHY a été conduit aux équations différentielles de cette série d'éléments, savoir :

$$\cdots = \frac{dx_i}{\frac{\partial f}{\partial p_i}} = \cdots = \frac{dz}{\Sigma p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}} = \cdots = \frac{-dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}} = \cdots \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Parmi ces éléments doit se trouver l'élément initial :

$$(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Nous représentons les intégrales du système (8) par les équations

$$z = f_n, \quad x_i = f_i, \quad p_i = f_{n+i}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

les fonctions f dépendant de x_n, et des valeurs initiales des variables. Il faut remarquer que x_{n0} est une constante supplémentaire et que p_{n0} est une fonction des autres valeurs initiales, donnée par la relation (7).

Nous pouvons donc énoncer ce théorème: *Toutes les intégrales de l'équation* (1) *qui ont en commun l'élément* (9), *ou qui se touchent au point*

$$z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0},$$

ont en commun une série d'éléments donnés par les équations (8) *ou* (10); autrement dit, *elles se touchent le long d'une ligne représentée par les* n *premières équations* (10). LIE a appelé *caractéristique* de f, l'ensemble de ces éléments communs (*).

COROLLAIRE. *Deux solutions*

$$z = F, \quad z = \Phi,$$

d'une même équation $f = 0$, *ont une caractéristique commune.* En effet, des relations

$$F = \Phi, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}},$$

(*) Mémoire B, théorème Ier; mémoire C, théorème *a*, p. 525.

qui, à cause de $f=0$, entraînent celle-ci :

$$\frac{\delta F}{\delta x_n}=\frac{\delta \Phi}{\delta x_n},$$

on conclut qu'il y a au moins un système de valeurs des quantités x, qui rendent égales les quantités z et p, déterminées par les deux solutions. Ces solutions ont donc un élément commun et par suite aussi une caractéristique commune (*).

129. *Méthode de Cauchy.* On déduit des équations (10) une solution de (1), comme on l'a vu (n° 108), en assujettissant les valeurs initiales, considérées comme fonctions de $(n-1)$ variables u, à satisfaire aux relations :

$$\frac{dz_0}{du}=p_{10}\frac{dx_{10}}{du}+\cdots+p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du}; \quad \ldots\ldots (11)$$

Il suffit, pour cela, de supposer z_0, x_{10}, ..., $x_{n-1,0}$ constants. Éliminant alors les quantités p_0 entre les équations (10), on trouve la solution :

$$z=F(x_1,\ldots,x_n,z_0,x_{10},\ldots,x_{n-1,0}),\quad p_i=\frac{\delta F}{\delta x}\cdot \quad \ldots (10)$$

On peut énoncer ce résultat comme suit : *Toutes les caractéristiques de* f *qui passent par un point* (z_0, x_{10}, ..., $x_{n-1,}$.) *engendrent une intégrale de* f (**).

On satisfait encore aux équations (11) en posant

$$z_0=z'_0+p_{10}x_{10}+\cdots+p_{m0}x_{m0},$$

et supposant que z'_0, p_{10}, ..., p_{m0}, $x_{m+1,0}$, ..., x_{n0} soient des constantes (n° 111), ce qui conduit à un théorème corrélatif du précédent, quand $m=n-1$.

On voit, d'après ce qui précède, qu'en employant la théorie des caractéristiques, l'on peut donner une forme très-simple : 1° à la méthode de Cauchy, ou à celle de Pfaff modifiée par Jacobi,

(*) Cette remarque est nouvelle, mais n'est pas utilisée dans la suite.

(**) Mémoire B, remarque relative au théorème premier ; mémoire C, remarque relative au théorème a, p. 325.

qui n'en diffère pas essentiellement; 2° à la modification apportée par Mayer à l'une et à l'autre.

130. *Propriétés de deux éléments infiniment peu différents* (*). Soit

$$z = F(x_1, \ldots, x_n),$$

une solution de l'équation $f = 0$, de sorte que l'on a, entre deux éléments infiniment voisins, la relation

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n;$$

autrement dit, l'on a :

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Si l'on fait varier infiniment peu $x_1, \ldots, x_n$, les quantités $z, p_1, \ldots, p_n$ varient aussi infiniment peu. Donc *deux éléments infiniment voisins d'une intégrale,* ou *passant par des points infiniment voisins, ont des coordonnées tangentielles infiniment peu différentes, ou sont infiniment peu inclinés l'un sur l'autre.*

La réciproque de ce théorème est vraie : *deux éléments infiniment voisins et infiniment peu inclinés l'un sur l'autre sont tels que l'on a*

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Soient, en effet, A et B deux éléments infiniment voisins et infiniment peu inclinés l'un sur l'autre :

$$(z, x_i, p_i) \quad \text{et} \quad (z + \Delta z, x_i + \Delta x_i, p_i + \Delta p_i),$$

Δz, Δx_i, Δp_i étant infiniment petits. Appelons a et b les points

$$(z, x_i) \quad \text{et} \quad (z + \Delta z, x_i + \Delta x_i)$$

Par le point a passe une solution de Cauchy, formée de toutes les caractéristiques contenant ce point, et rencontrant en un point

(*) Nous n'avons pas rencontré explicitement cette propriété dans les écrits de Lie. Le théorème corrélatif de Mayer (n° 129, fin) peut fournir une démonstration dans les cas où ne subsiste pas le théorème équivalent à la méthode de Cauchy.

c la caractéristique qui passe par B. Appelons C l'élément de cette caractéristique qui passe par c. Si l'élément B converge vers l'élément A, c converge vers a, dont il est, par suite, infiniment rapproché, ainsi que de b. Il en résulte que les coordonnées de l'élément C ne peuvent différer qu'infiniment peu de celles de B ou de A. Représentons-les par

$$(z + \Delta' z,\ x_i + \Delta' x_i,\ p_i + \Delta' p_i),$$

et posons

$$\Delta z = \Delta' z + \Delta'' z, \quad \Delta x_i = \Delta' x_i + \Delta'' x_i.$$

Puisque A et c appartiennent à une même solution, on a

$$\Delta' z = p_1 \Delta' x_1 + \cdots + p_n \Delta' x_n + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit du second ordre. De même

$$\Delta'' z = (p_1 + \Delta' p_1)\, \Delta'' x_1 + \cdots + (p_n + \Delta' p_n)\, \Delta'' x_n + \varepsilon',$$

ε' étant aussi du second ordre, parce que B et C appartiennent à une même caractéristique. Ajoutons ces deux relations, il viendra

$$\Delta z = p_1 \Delta z_1 + \cdots + p_n \Delta x_n + \varepsilon'',$$

ε'' étant infiniment petit du second ordre. Donc, enfin, en prenant la différentielle de z,

$$dz = p_1 \Delta x_1 + \cdots + p_n \Delta x_n,$$

ou

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous appellerons *éléments infiniment peu différents* ceux qui jouissent de la propriété dont il est question ici.

Il résulte de là que, *pour trouver une intégrale de* $\mathrm{f} = 0$, *il faut et il suffit de trouver* ∞^n *éléments* infiniment peu différents (n° 5).

131. *Congruence caractéristique; variété caractéristique* (*). Considérons deux équations aux dérivées partielles

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

ayant des solutions communes, et un élément A, commun à ces solutions et aux équations données. D'après le n° 128, les solutions communes et, par suite, les équations données, contiendront la caractéristique de f qui passe par A; ensuite, pour la même raison, les solutions communes et les équations données contiendront les ∞ caractéristiques de φ, qui passent par les éléments de cette caractéristique de f. Donc *si des solutions communes de deux équations ont un élément commun, elles en ont une infinité double* (∞^2). L'ensemble de ces éléments communs s'appelle une *congruence caractéristique* des équations données, par rapport à l'élément considéré.

Si l'on exprime analytiquement la génération des congruences caractéristiques, on reconnaît que les fonctions f et φ jouent un rôle symétrique dans ces calculs. On en conclut que l'on peut considérer la congruence caractéristique de $f = 0$ et $\varphi = 0$, passant par A comme l'ensemble des ∞ caractéristiques de φ qui passent par les éléments de la caractéristique de f contenant l'élément A; ou, comme l'ensemble des ∞ caractéristiques de f qui passent par les éléments de la caractéristique de φ, contenant l'élément A.

On peut étendre ce qui précède à un nombre quelconque d'équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \ldots$$

ayant des solutions communes, qui se touchent en un élément A. Par cet élément A, passe une caractéristique de f, qui est dans toutes les solutions communes et dans les équations elles-mêmes. Par chaque élément de cette caractéristique, passe aussi une caractéristique de φ, située dans les diverses solutions communes

(*) Mémoire B, première partie du théorème II; mémoire C, première partie des théorèmes b et c.

considérées. Par chaque élément de la congruence caractéristique ainsi obtenue, passe une caractéristique de ψ, située dans toutes les solutions communes et dans toutes les équations, et ainsi de suite. Donc enfin, *si* m *équations ont des solutions communes passant par un élément* A, *elles ont* ∞^m *éléments communs à toutes ces solutions communes.* L'ensemble de ces éléments communs s'appelle la *variété caractéristique* de ces équations.

Corollaire I. On prouverait aisément, comme au nº 128, que deux solutions communes d'un système ont en commun une variété caractéristique.

Corollaire II. Considérons deux équations simultanées $f = 0$, $\varphi = 0$, ayant une solution commune. Les caractéristiques de f et de φ, en un élément commun à cette solution et aux équations données, doivent se trouver respectivement parmi les éléments de $\varphi = 0$, et de $f = 0$. Il en résulte que $\varphi = 0$ doit être une solution des équations (8), et $f = 0$, une solution des équations analogues où φ remplace f. On a donc

$$\Sigma \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0,$$

relation que nous écrirons simplement $f\varphi = 0$. C'est la condition d'intégrabilité simultanée de Jacobi et de Bour. La remarque précédente s'appliquant à autant d'équations que l'on veut, permet de compléter tout système d'équations simultanées, comme on l'a vu (nº 79).

132. *Méthode de Lie* (*). *Si deux équations* f $= 0$, *satisfont à la condition* f$\varphi = 0$, *le lieu des congruences caractéristiques qui passent par un point commun constitue une solution commune.* En effet, d'abord, ce lieu se compose de ∞^{n-2} congruences caractéristiques contenant chacune ∞^2 éléments, donc, en tout ∞^n éléments. Pour le prouver, il suffit de remarquer que par le point donné (z_0, x_{i0}), passent ∞^{n-2} éléments communs aux deux équa-

(*) Mémoire B, seconde partie du théorème II; mémoire C, seconde partie des théorèmes *b* et *c*.

tions, que l'on obtient, en faisant varier de toutes les manières possibles $p_{10}, \ldots, p_{n-2,0}$, et déterminant $p_{n-1,0}$, p_{n0}, au moyen des équations données. Or, par chaque élément commun passe une congruence caractéristique; donc il y en a, en tout, ∞^{n-2}, contenant ∞^n éléments.

Ensuite, deux éléments infiniment voisins A, B parmi ce groupe de ∞^n éléments, sont infiniment peu différents. En effet, il est clair que deux éléments infiniment voisins ne peuvent pas, en général, se trouver sur deux congruences caractéristiques passant par des éléments non infiniment peu différents. Nous devons donc supposer les deux éléments voisins en question sur une même congruence caractéristique ou sur deux caractéristiques déterminées par des éléments

$$(z_0, x_{i0}, p_{i0}), \quad (z_0, x_{i0}, p_{i0} + \Delta p_{i0}),$$

infiniment peu inclinés l'un sur l'autre. 1° Considérons d'abord deux éléments A, B situés sur une même congruence caractéristique. La caractéristique de f passant par A, qui est une variété à une dimension, rencontrera la caractéristique de φ passant par B, sur la congruence, qui est une variété à deux dimensions, en un élément C, infiniment voisin, en général, de A et de B, et par suite infiniment peu différent de l'un et de l'autre. Donc A et B diffèrent aussi infiniment peu, comme il fallait le démontrer. 2° Supposons maintenant que A et B soient sur les deux congruences caractérisées par les éléments initiaux (z_0, x_{i0}, p_{i0}), $(z_0, x_{i0}, p_{i0} + \Delta p_{i0})$. Les coordonnées de A sont exprimées en fonction de x_{n-1}, x_n, z_0, x_{i0}, p_{i0}. Si l'on change dans les expressions de ces coordonnées, p_{i0} en $p_{i0} + \Delta p_{i0}$, on obtiendra sur la seconde congruence, un élément C, infiniment voisin de A, et par suite de B. Puisque p_{i0} a varié infiniment peu en passant de A en C, C est infiniment peu différent de A; il est aussi infiniment peu différent de B, puisqu'il est infiniment voisin de B et sur la même congruence. Donc enfin, A et B, sont, dans tous les cas, infiniment peu différents, et le lieu des congruences caractéristiques qui passent par un point commun, contenant ∞^n éléments infiniment peu différents les uns des autres, est une intégrale (n° 130).

On démontre de même que *le lieu des variétés caractéristiques de* m *équations satisfaisant aux conditions d'intégration simultanée et passant par un point, est une solution commune.*

Nous avons indiqué plus haut (nos 124, 126 et remarque finale du n° 127) comment on peut donner aux équations une forme telle que l'on puisse trouver leur variété caractéristique et par suite leur intégrale commune. Dans le cas de deux équations seulement, on ne doit pas transformer les équations données (*).

133. *Méthode de Jacobi.* Considérons m équations aux dérivées partielles :

$$f_1 = 0, \ldots, f_m = 0,$$

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Supposons que l'on ait trouvé, en outre, $k = (n + 1 - m)$ fonctions $f_{m+1}, \ldots, f_{n+1}$, qui satisfassent avec les précédentes et entre elles aux conditions $f_i f_k = 0$. Je dis que les équations

$$f_1 = 0, \ldots, f_m = 0, f_{m+1} = a_1, \ldots, f_{n+1} = a_k, \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

ou celles que l'on en déduit, en les résolvant par rapport à $z, p_1, \ldots, p_n$,

$$z = \mathrm{F}, \quad p_1 = \mathrm{F}_1, \ldots, p_n = \mathrm{F}_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{F})$$

représentent les ∞^{2n+1-m} éléments du système primitif, quand $a_1, \ldots, a_k$ sont des constantes arbitraires, et que, de plus, $z = \mathrm{F}$ est l'intégrale complète commune du système donné.

Considérons, en effet, le système

$$f_1 = 0, \ldots, f_m = 0, \quad f_{m+1} = a_1.$$

Si l'on donne à a_1 une valeur spéciale, il ne représentera plus que ∞^{2n-m} éléments du système primitif, mais si on laisse a_1 arbitraire, il représentera de nouveau ∞^{2n+1-m} éléments; ces élé-

(*) Nous avons cité au n° 127, le petit mémoire où Mayer indique les calculs à faire pour établir algébriquement la méthode de Lie, sous sa forme la plus générale. Comparez mémoire B de Lie, théorème III et IV.

ments seront les mêmes qu'avant l'adjonction de $f_{m+1} = a_1$, puisque cette relation, prise à part, est satisfaite par les coordonnées d'un élément quelconque de l'espace, a étant arbitraire.

On peut adjoindre, de la même manière, au système primitif les autres équations $f = a$, et obtenir ainsi le système (f) ou (F), à la place du système primitif. Si l'on fait varier, dans les équations (F), $x_1, \ldots, x_n$, de quantités infiniment petites, en laissant les quantités a constantes, z, $p_1, \ldots, p_n$ varient aussi infiniment peu. Donc les éléments infiniment voisins du système (F) sont infiniment peu différents et constituent une intégrale pour chaque valeur des quantités a. Donc $z = \mathrm{F}$ est l'intégrale complète commune et l'on a

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} = \mathrm{F}_i,$$

ou

$$d\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 dx_1 + \cdots + \mathrm{F}_n dx_n.$$

Il résulte de la dernière observation, que l'on peut trouver la première équation (F) en intégrant l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

où les quantités p sont remplacées par leurs valeurs déduites des n premières équations f. Ceci suppose toutefois que l'on sache qu'il y a réellement une intégrale complète commune avec k constantes arbitraires, ce qu'apprend la méthode de Lie.

Remarque. Ce qui précède contient essentiellement la méthode de Jacobi, c'est-à-dire le mode de détermination de z, au moyen des fonctions f; le théorème de Poisson et Jacobi, et les méthodes de Weiler, de Boole et de Mayer donnent les moyens de trouver les fonctions f, avec plus ou moins de facilité.

134. *Conclusion.* Les diverses méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles se groupent autour des méthodes de Cauchy, de Lie et de Jacobi. On vient de voir que la dernière consiste essentiellement en une transformation du système donné en un autre contenant une équation de plus. Si l'on

pousse cette transformation à bout, on trouve l'intégrale sans autre calcul. Mais on peut l'arrêter quand on veut, et, comme on l'a vu au n° 125, se servir de la méthode de Lie, pour réduire le système à une équation, que l'on peut intégrer par la méthode de Cauchy, chaque fois que la méthode de Jacobi n'est pas plus favorable (voir nos 125 et 70, III).

La théorie des lignes, des congruences et des variétés caractéristiques permet donc de *fondre en une seule* toutes les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT III

I. Objet de ce mémoire . . . . *ib.*

II. Liste des ouvrages et mémoires cités le plus fréquemment . . . IV

III. Notations et conventions spéciales VII

PLAN DU MÉMOIRE ET NOTICE HISTORIQUE IX

INTRODUCTION.

GÉNÉRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

§ I[er]. ***Définition des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Moyen d'en faire disparaître la variable dépendante. Interprétation géométrique de Lie*** 1

1. Définition de Lagrange . . . . *ib.*
2. Première méthode de transformation 2
3. Seconde méthode de transformation 4
4. Définition d'une équation aux dérivées partielles, d'après Lie 6
5. Nouvelle manière d'envisager l'intégration des équations aux dérivées partielles 8

§ 2. ***Génération des équations à trois variables. Théorie de Lagrange*** . 9

6. Génération de ces équations, de trois manières différentes 9
7. Toutes les intégrales de l'équation (3) sont données par (1), (4) et (6), ou (1), (7), (8) 11
8. Extension de la théorie précédente au cas d'une relation implicite entre x, y, z 12
9. Exemples 15

§ 3. ***Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lagrange*** 18

10. Génération de ces équations, de trois manières différentes . . . . . *ib.*
11. Toute intégrale de l'équation (3) est comprise dans les précédentes . . 20
12. Génération des équations aux dérivées partielles simultanées 22

§ 4. ***Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lie*** 24

13. Génération d'une équation aux dérivées partielles, au moyen de plusieurs équations primitives . . . . *ib.*
14. Classification des équations aux dérivées partielles 26
15. Des constantes supplémentaires 27

LIVRE I.

Méthode de Lagrange et de Pfaff.

Pages.

CHAPITRE I. ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 31

§ 5. *Équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*. . . . . ib.

16. Génération de ces équations . . . . ib.
17. Systèmes d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation (2) 33
18. Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes 35
19. Détermination de la fonction arbitraire; interprétation géométrique. 36
20. Exemples. 38
21. De quelques équations que l'on peut rendre linéaires. 42

§ 6. *Équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables*. 44

22. Génération de ces équations, d'après Lagrange. . , ... ib.
23. Génération des équations linéaires d'après Lie 46
24. Système d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation (2) . . . . ib.
25. Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables 49
26. Détermination de la fonction arbitraire . . . . ib.
27. Exemples. 51
28. De quelques équations que l'on peut rendre linéaires. 56

§ 7. *Intégration d'un système remarquable d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre*. 58

29. Génération du système de ces équations . . . . ib.
30. Démonstration directe des formules (6) 60
31. Intégration du système (6) 61
32. Conclusion générale 62

CHAPITRE II. MÉTHODE DE LAGRANGE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A TROIS VARIABLES ET DE QUELQUES ÉQUATIONS CONTENANT UN PLUS GRAND NOMBRE DE VARIABLES 63

§ 8. *Idée générale de la méthode de Lagrange* . . . . ib.

33. Idée générale de la méthode de Lagrange. . . . . ib.
34. Exemples. 65

§ 9. *Méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à trois variables* 68

35. Cas où l'équation ne contient pas la variable dépendante . . . . ib.
36. Cas général 70
37. Déduction de l'intégrale générale, de l'équation (11), (11') ou (13) . 72
38. Recherche de l'intégrale complète 75

Pages.

§ 10. *Exemples* 76

39. Exemple d'application de la méthode du n° 37 . . . . *ib.*
40. Exemples dépendant de l'intégration d'une seule des équations auxiliaires 78
41. Quelques exemples dépendant de l'intégration de deux des équations auxiliaires 84

CHAPITRE III. EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES 86

§ 11. *Théorie* . . . . *ib.*

42. Réduction de la question à l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées . . . . *ib.*
43. Changement de variables 89

§ 12. *Application à l'intégration de l'équation de Schläfli* 92

44. Intégration du système d'équations différentielles simultanées auquel conduit la question . . . . *ib.*
45. Intégration de l'équation donnée 97

CHAPITRE IV. MÉTHODE DE PFAFF 100

§ 13. *Transformation de Pfaff* . . . . *ib.*

46. Idée générale du problème de Pfaff . . . . *ib.*
47. Détermination des relations qui existent entre les anciennes et les nouvelles variables 101
48. Résolution des équations (12), par rapport aux dérivées $\frac{\partial x}{\partial x_m}$ . . . 104
49. Extension de la méthode précédente de transformation 107

§ 14. *Intégration des équations différentielles totales et des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode de Pfaff* 109

50. Intégrale complète d'une équation différentielle totale par la méthode de Pfaff . . . . *ib.*
51. Intégrales que l'on peut déduire de l'intégrale complète 111
52. Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 112

§ 15. *Simplification de la méthode de Pfaff. Problème inverse* . . . 115

53. Simplification de la méthode de Pfaff pour l'intégration des équations aux dérivées partielles par Jacobi . . . . *ib.*
54. Simplification de la méthode générale de Pfaff par Jacobi 117
55. Problème inverse de celui de Pfaff 119

LIVRE II.

Méthode de Jacobi.

Pages.

CHAPITRE I. PRINCIPES 125

§ 16. *Propriétés fondamentales des expressions symboliques de Poisson* . . . . *ib.*

56. Définitions . . . . *ib.*
57. Développements des diverses expressions $\varphi\psi$ 127

§ 17. *Théorème fondamental de Jacobi* 130

58. Forme spéciale des conditions $(\varphi, \psi) = 0$, quand φ et ψ sont linéaires par rapport aux dérivées partielles de la variable dépendante . . *ib.*
59. Théorème fondamental de Jacobi. Démonstration de Jacobi . . . 133
60. Démonstration de Donkin 134

§ 18. *Formes diverses des conditions d'intégrabilité d'une équation aux dérivées partielles* 135

61. Première forme des conditions d'intégrabilité . . . . *ib.*
62. Seconde forme des conditions d'intégrabilité 136
63. Troisième forme des conditions d'intégrabilité 138
64. Quatrième forme des conditions d'intégrabilité. 142
65. Cinquième forme des conditions d'intégrabilité. 143
66. Sixième, septième et huitième forme des conditions d'intégrabilité. 145

CHAPITRE II. INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE 147

§ 19. *Méthode de Jacobi quand les équations cherchées sont résolues par rapport aux constantes* . . . . *ib.*

67. Idée générale de la marche à suivre dans l'intégration des systèmes (II) *ib.*
68. Intégration de l'équation (1) et du système (2) 148
69. Intégration du système (3) et des autres systèmes 151
70. Remarques 152
71. Simplifications et modifications 153
72. Cas plus général de simplification. Séparation des variables . . . 154
73. Exemples. 158

§ 20. *Méthode de Jacobi sous sa forme la plus simple* 161

74. Idée générale de la marche à suivre . . . . *ib.*
75. Intégration du système (2) 164
76. Intégration du système (3) 167
77. Intégration des autres systèmes et en particulier du dernier . . . 168
78. Exemple 169

Pages.

CHAPITRE III. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE 173

§ 21. *Théorie générale. Méthode de Bour* . . . . ib.

79. Cas où les équations données sont résolues par rapport à m des quantités p. . . . . ib.
80. Cas où les équations sont données sous forme implicite. 175
81. Cas spécial, où il est inutile de recourir aux équations $p - \psi = 0$. 177
82. Exemple 178

CHAPITRE IV. MÉTHODE DE CLEBSCH ET DE WEILER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI 180

§ 22. *Réduction d'un système complet d'équations linéaires à un système de Jacobi, ou transformation de Clebsch* . . . . . ib.

83. Propriété d'un système complet . . . . ib.
84. Réduction d'un système complet à un système de Jacobi 181
85. Intégration du système des équations $Bz = 0$ 182

§ 23. *Méthode de Weiler pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles auxquels conduit la méthode de Jacobi* 184

86. Notations et conventions spéciales pour l'application de la méthode du § précédent . . . . ib.
87. Transformation de Weiler 185

CHAPITRE V. MÉTHODE DE KORKINE ET DE BOOLE 187

§ 24. *Méthode de Korkine* . . . . ib.

88. Idée générale de la méthode de Korkine . . . . ib.
89. Démonstration de la première propriété du système transformé . . 189
90. Démonstration de la seconde propriété du système transformé . . 192

§ 25. *Équations linéaires. Méthode de Boole* 197

91. Forme spéciale des équations linéaires et de leurs conditions d'intégrabilité . . . . ib.
92. Transformation des éqnations linéaires 199
93. Exemple 201

CHAPITRE VI. MÉTHODE DE MAYER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI. 206

§ 26. *Intégration des systèmes d'équations totales linéaires intégrables complétement* . . . . ib.

94. Correspondance entre les systèmes simultanés d'équations linéaires et certains systèmes d'équations différentielles totales . . . . ib.

Pages.

95. Conditions nécessaires d'intégrabilité complète (*unbeschränkte Integrabilität*) 208
96. Réduction du système (3) à m systèmes de n équations ordinaires du premier ordre 209
97. Détermination de ces systèmes successifs 211
98. Réduction de l'intégration des m systèmes auxiliaires de n équations à celle d'un seul système 213

§ 27. ***Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*** 216

99. Intégration complète d'un système de Jacobi . . . . *ib.*
100. Théorème de Mayer. On peut déduire une solution du système (1') de chaque solution du système (16) 217
101. Application à l'intégration des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi 219

LIVRE III.

Méthode de Cauchy et de Lie.

CHAPITRE I. EXPOSITION GÉNÉRALE. TRAVAUX DE CAUCHY. 221

§ 28. ***Cas des équations à deux variables indépendantes*** . . . . . *ib.*

102. Idée générale de la méthode de Cauchy, dans le cas des équations à deux variables indépendantes . . . . *ib.*
103. Détermination d'une intégrale de (12) satisfaisant à (4). 224
104. Examen d'une objection de Bertrand 226
105. Remarques. 228
106. Exemples 229

§ 29. ***Équations contenant un nombre quelconque de variables*** . . . 231

107. Réduction du problème à l'intégration d'un système d'équations simultanées . . . . *ib.*
108. Détermination d'une intégrale de (12) satisfaisant à (4) 233
109. Remarques. 235
110. Exemple. 236
111. Cas d'exception apparente. Modifications de Mayer et Darboux . . 237

CHAPITRE II. RECHERCHES DE SERRET 239

§ 30. ***Équations à deux variables indépendantes*** . . . . *ib.*

112. Forme donnée à la solution générale dans les recherches de Serret *ib.*
113. Nouvelle forme de la valeur de I, trouvée par Serret 240
114. Examen du cas critique 242
115. Exemple. 244

Pages.

§ 31. *Équations à n variables* 245

116. Forme donnée à l'intégrale générale dans les recherches de Serret. *ib.*
117. Nouvelle forme de la valeur de I, trouvée par Serret 247
118. Examen du cas critique par Serret. 249
119. Cas des équations semi-linéaires 251

CHAPITRE III. MÉTHODE DE LIE, CONSIDÉRÉE COMME UNE EXTENSION DE CELLE DE CAUCHY 255

§ 32. *Exposition de Mayer* . . . . *ib.*

120. Moyen de déduire d'une intégrale complète, une intégrale qui, pour $x_n = x_{n0}$, soit une fonction donnée des autres variables. . . . *ib.*
121. Transformation d'une équation en une autre équivalente 257
122. Transformation d'un système de deux équations 260
123. Simplification de la transformation précédente. Méthode générale de Lie, pour les systèmes simultanés. 262
124. Seconde simplification. Théorème fondamental de Lie 263
125. Mode d'application de la méthode de Lie. 265
126. Démonstration directe du théorème fondamental de Lie, par la méthode de Cauchy . . . . *ib.*
127. Remarques sur la méthode précédente 269

APPENDICE.

LA MÉTHODE DE LIE, COMME SYNTHÈSE DES MÉTHODES ANTÉRIEURES.

§ 33. *Exposition de Lie* 271

128. Définition des caractéristiques . . . . *ib.*
129. Méthode de Cauchy 274
130. Propriétés de deux éléments infiniment peu différents 275
131. Congruence caractéristique; variété caractéristique 277
132. Méthode de Lie 278
133. Méthode de Jacobi 280
134. Conclusion 281